1. Expresar las integrales siguientes en el orden indicado en cada caso.

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$, en el orden z,y,x;

   (b) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\frac{4-x}{2}}\int_0^{\frac{12-3x-6y}{4}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$, en el orden y,x,z.

   Solución: (a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\frac{12-4z}{3}}\int_0^{\frac{12-3x-4z}{6}} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

2. Integrar cambiando el orden de todas las formas posibles:

   $$\text{(a)}\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx; \qquad \text{(b)}\int_0^1\int_0^x\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

   Solución:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^x\int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$; $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^y f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$; $\displaystyle\int_0^1\int_0^y\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_z^1\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$; $\displaystyle\int_0^1\int_z^1\int_z^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$.

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx+\int_0^1\int_{x^2}^{2x^2}\int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx$; $\displaystyle\int_0^1\int_y^1\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2y^2}\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy+\int_0^1\int_{2y^2}^{1+y^2}\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^{\sqrt{z}}\int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz+\int_0^1\int_{\sqrt{z}}^1\int_0^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz+\int_1^2\int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1\int_{\sqrt{z-x^2}}^x f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$;
   $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{\frac{z}{2}}}\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz+\int_0^1\int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz+$
   $+\displaystyle\int_1^2\int_{\sqrt{z-1}}^{\sqrt{\frac{z}{2}}}\int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz+\int_1^2\int_{\sqrt{\frac{z}{2}}}^1\int_y^1 f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$.

3. Evaluar $\displaystyle\int\int\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ para las siguientes funciones f y recintos W:

   (a) $f(x,y,z)=ze^{x+y}$, $\quad W=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

   (b) $f(x,y,z)=2x+3y+z$, $\quad W=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$;

   (c) $f(x,y,z)=e^{-xy}y$, $\quad W=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$;

   (d) $f(x,y,z)=\dfrac{z^2y-zx^2-zx^4}{1+x^2}$, $\quad W=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

   Solución: (a) $\dfrac{1}{2}(e-1)^2$; (b) 7; (c) $\dfrac{1}{e}$; (d) $\dfrac{\pi-4}{24}$.

4. Calcular la integral triple $\displaystyle\int\int\int_M \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, donde el recinto M está limitado por las superficies $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

   Solución: $\dfrac{1}{2}\ln 2-\dfrac{5}{16}$.

5. Hallar $\displaystyle\int\int\int_D yz\,dx\,dy\,dz$, si D es el recinto limitado por los planos coordenados y los planos $x+y=1$, $z=4$.

   Solución: $\dfrac{4}{3}$.

6. Calcular $\displaystyle\int\int\int_M xyz\,dx\,dy\,dz$, siendo M el recinto limitado por las superficies:

(a) $x^2+y^2-2x=0,\ y=z^2,\ z=0$;

(b) $x^2+y^2-2z=0,\ y=z^2$.

Solución: (a) $\dfrac{\pi}{16}$; (b) 0.

7. Hallar $\int\int\int_D yz\ dz\ dy\ dx$, siendo D el primer octante del sólido delimitado por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

   Solución: $\dfrac{ab^2c^2}{15}$.

8. Mediante un cambio de variable a coordenadas cilíndricas, calcúlense las siguientes integrales:

   (a) $\int\int\int_D (x^2+y^2)^2\ dx\ dy\ dz,\ D=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 2z\le 4\}$;

   (b) $\int\int\int_D z\exp\{-(x^2+y^2)\}\ dx\ dy\ dz,\ D=\{(x,y,z): 2(x^2+y^2)\le z^2\le x^2+y^2+1,\ z\ge 0\}$.

   Solución: (a) $\dfrac{32\pi}{3}$; (b) $\dfrac{\pi}{2e}$.

9. Hallar $\int\int\int_D z\ dx\ dy\ dz$, siendo $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\le z^2,\ x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$.

   Solución: $\dfrac{\pi}{8}$.

10. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2\le 4,\ 2\le z\le 3$.

    Solución: $\dfrac{5\pi}{2}(e^4-1)$.

11. Mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas, calcúlense las siguientes integrales:

    (a) $\int\int\int_D xyz\ dx\ dy\ dz,\ D=\{(x,y,z): x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 1\}$;

    (b) $\int\int\int_D (x^2+y^2+z^2)\ dx\ dy\ dz,\ D=\{(x,y,z): 2az\le x^2+y^2,\ x^2+y^2+z^2\le 3a^2\}$.

    Solución: (a) $\dfrac{1}{48}$; (b) $\dfrac{2\pi}{5}a^5\left(9\sqrt{3}+\dfrac{97}{12}\right)$.

12. Sea B la esfera unidad. Evaluar $\int\int\int_B \dfrac{dx\ dy\ dz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.

    Solución: $4\pi\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\ln\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

13. Calcular

$$\int\int\int_S \frac{dx\ dy\ dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

    siendo S el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

    Solución: $4\pi\ln\dfrac{a}{b}$.

14. Calcular el volumen del sólido limitado por la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cilindro $x^2+y^2-ay=0$.

    Solución: $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{8}{9}\right)a^3$.

15. Hallar el volumen del recinto $D=\left\{(x,y,z): 0\le z\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1\right\}$.

    Solución: 3π.

16. Calcular el volumen del sólido de revolución $z^2 \geq x^2 + y^2$ encerrado por la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

    Solución: $\dfrac{4\pi}{3}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

17. Hallar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

    Solución: $25\pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

18. Calcular la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y el cono $z^2 = x^2 + y^2$ si la densidad es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

    Solución: 3π.