1. Calcular las áreas de las siguientes superficies:
   (a) $z = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$;
   (b) $y = x^2 + z^2 - 1$, $0 \le y \le 3$;
   (c) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$.

   Solución: (a) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 1\right)$; (b) $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right)$; (c) $2\pi a^2$.

2. Calcular el área de la superficie σ: $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \operatorname{sen} v$, $z = \operatorname{sen} u$ $(0 \le u \le \frac{\pi}{4},\ 0 \le v \le u)$.

   Solución: $\dfrac{\pi + 4 - 4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$.

3. Hallar las áreas de las superficies siguientes:
   (a) El tronco de cono de ecuación $z = a\sqrt{x^2 + y^2}$ correspondiente a bases de radios b, c, con $b < c$.
   (b) La superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ limitada por el cilindro $x^2 + 4y^2 = 9$.

   Solución: (a) $\pi\sqrt{1 + a^2}(c^2 - b^2)$; (b) 12π.

4. Hallar el área del toro circular obtenido al girar una circunferencia de radio R alrededor de un eje situado en el plano en que se encuentra la circunferencia y a una distancia $a > R$ de su centro.

   Solución: $4\pi^2 aR$.

5. Evaluar $\displaystyle\int_S xyz\, dS$, donde S es el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,1,1)$.

   Solución: $\dfrac{\sqrt{6}}{30}$.

6. Evaluar $\displaystyle\int_S z^2\, dS$, siendo C la frontera del cubo $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.

   Solución: $\dfrac{40}{3}$.

7. Calcular $\displaystyle\int_\sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$, siendo σ la superficie del cono $z^2 = 3(x^2 + y^2)$, con $0 \le z \le 3$.

   Solución: 9π.

8. Sea σ la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$. Hallar $\displaystyle\int_\sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma$.

   Solución: $\dfrac{4\pi a^4}{3}$.

9. Se considera el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{k}$. Hallar $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\sigma$, donde σ es la superficie de ecuaciones paramétricas $x = \cos u \cos v$, $y = \operatorname{sen} u \cos v$, $z = \frac{1}{2}\operatorname{sen} v$, para $0 \le u, v \le \frac{\pi}{2}$.

   Solución: $\dfrac{5}{6}$.

10. Sea σ la superficie de ecuaciones paramétricas $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$, $z = u^2$, para $0 \le u \le 3$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$. Sea el campo vectorial $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el flujo de $\mathbf{R}$ a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: $\dfrac{81\pi}{8}$.

11. Sea σ la porción de superficie cilíndrica $x = 3\cos\theta$, $y = 3\operatorname{sen}\theta$, $z = z$ $(0 \le \theta \le \pi,\ -3 \le z \le 3)$, y sea el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de σ en el sentido de la normal exterior.

    Solución: 54π.

12. Calcular $\oint_\gamma 2y\,dx + 3x\,dy - z^2\,dz$, siendo γ la circunferencia de ecuaciones paramétricas $x = 3\cos\lambda$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,\lambda$, $z = 0$, para $0 \le \lambda \le 2\pi$.

    Solución: 9π.

13. Sea S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Comprobar que se verifica el teorema de Stokes para $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$.

14. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \ge 0$:

    (a) directamente;

    (b) mediante el teorema de Stokes.

    Solución: -16π.

15. Evaluar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$, donde S es la porción de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tal que $x + y + z \ge 1$, y $\mathbf{F} = (x, y, z) \times (1, 1, 1)$.

    Solución: $-\dfrac{4\pi}{\sqrt{3}}$.

16. Hallar $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $\mathbf{F} = (\,\mathrm{sen}\,xy, e^x, -yz)$.

    Solución: 0.

17. Sea V un sólido de volumen 13 unidades limitado por la superficie cerrada σ. Sea $\mathbf{R}$ el campo vectorial definido por el vector de posición: $\mathbf{R}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Hallar $\oint_\sigma \mathbf{R} \cdot d\sigma$.

    Solución: 39.

18. Se consideran el campo vectorial $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ y la superficie σ, contorno del sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 3\right\}.$$

    Calcular el flujo $\int_\sigma \mathbf{F} \cdot d\sigma$:

    (a) por medio del teorema de la divergencia;

    (b) directamente.

    Solución: $-\dfrac{3\pi}{2}$.

19. Se consideran el casquete de paraboloide $\sigma : z = 4 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$ y el campo vectorial

$$\mathbf{F} = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j} + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{k}.$$

    Hallar el flujo de $\mathbf{F}$ a través de σ hacia el exterior del paraboloide.

    Solución: 2π.

20. Sea $\mathbf{F} = (y, z, xz)$. Evaluar $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot dS$ para cada una de las siguientes regiones Ω:

    (a) $x^2 + y^2 \le z \le 1$;

    (b) $x^2 + y^2 \le z \le 1$, $x \ge 0$;

    (c) $x^2 + y^2 \le z \le 1$, $x \le 0$.

    Solución: (a) 0; (b) $\dfrac{4}{15}$; (c) $-\dfrac{4}{15}$.

21. Calcular $\int_S \mathbf{F} \cdot dS$, donde $\mathbf{F} = (3xy^2, 3x^2y, z^3)$ y S es la esfera unidad.

    Solución: $\dfrac{12\pi}{5}$.

22. Evaluar $\int_S \mathbf{F} \cdot dS$, donde $\mathbf{F} = \left(1, 1, z(x^2+y^2)^2\right)$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$.

    Solución: $\dfrac{\pi}{3}$.

23. Sea $\mathbf{F} = (2yz, -x+3y+2, x^2+z)$. Calcular $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot dS$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq 1$: (a) incluyendo las bases; (b) excluyendo las bases.

    Solución: (a) 0; (b) $2\pi a^2$.

24. Sea S la superficie cerrada formada por la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$. Sea también $\mathbf{E} = (2x, 2y, 2z)$ un campo eléctrico definido en $\mathbb{R}^3$. Hallar el flujo de $\mathbf{E}$ a través de S.

    Solución: 4π.

25. Supongamos que el campo de velocidad de un fluido viene dado por $\mathbf{F} = (1, x, z)$, medido en metros por segundo. Calcular cuántos metros cúbicos de fluido por segundo cruzan la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$.

    Solución: $\dfrac{2\pi}{3}\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$..