1. Calcular las siguientes integrales curvilíneas:

   (a) $\displaystyle\int_C (x+y)\,ds$, donde C es el contorno del triángulo de vértices $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$;

   (b) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,ds$, donde C es la curva $x = a(\cos t + t\,\mathrm{sen}\,t)$, $y = a(\,\mathrm{sen}\,t - t\cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

   (c) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$, donde C es la hélice circular $x = a\cos t$, $y = a\,\mathrm{sen}\,t$, $z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

   Solución: (a) $1+\sqrt{2}$; (b) $2a^3\pi^2\,(1+2\pi^2)$; (c) $2\pi\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2+\dfrac{4}{3}\pi^2b^2\right)$.

2. Hallar las longitudes de los arcos de las curvas alabeadas siguientes:

   (a) $x = 3t$, $y = 3t^2$, $z = 2t^3$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(3,3,2)$;

   (b) $x^2+y^2 = cz$, $\dfrac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\dfrac{z}{c}$, desde $O(0,0,0)$ hasta $A(x_0,y_0,z_0)$;

   (c) $x = e^{-t}\cos t$, $y = e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t$, $z = e^{-t}$ $(0 < t < +\infty)$.

   Solución: (a) 5; (b) $\sqrt{cz_0}\left(\dfrac{2z_0}{3c}+1\right)$; (c) $\sqrt{3}$.

3. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \omega$, siendo:

   (a) $\omega = \dfrac{1}{xy}\,dx + \dfrac{1}{x+y}\,dy$; $\gamma(t) = (2t,5t)$ $(1 \le t \le 4)$, orientado negativamente.

   (b) $\omega = e^x(\cos y\,dx + \,\mathrm{sen}\,y\,dy)$; γ el contorno del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$, orientado positivamente.

   (c) $\omega = xy\,dx + (x^2-y^2)\,dy$; γ el camino cuya imagen es la elipse de ecuación $x^2+2y^2 = 4$, dotado de una orientación cualquiera.

   (d) $\omega = y^2\,dx + x^2\,dy$; γ el camino cuya imagen es la elipse de ecuación $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 - 2(\dfrac{x}{a}) = 0$, dotado de la orientación canónica.

   Solución: (a) $-\dfrac{3}{20} - \dfrac{10}{7}\ln 2$; (b) $2(e-1)(1-\cos 1)$; (c) 0; (d) $2\pi a^2 b$.

4. Sea el campo vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2-y^2)$, y sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente, con punto inicial $(1,0)$. Hallar $\displaystyle\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot\,ds$.

   Solución: 0.

5. Calcular $\displaystyle\int_\gamma y\,dx - x\,dy$ a lo largo de la curva cerrada $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, siendo γ_1 el primer cuadrante de la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ y γ_2 el segmento que une los puntos $(0,3)$ y $(4,0)$.

   Solución: $12 - 6\pi$.

6. Hallar todas las circunferencias del plano $\mathbb{R}^2$ tales que, con cualquier orientación, la integral curvilínea de la forma diferencial $\omega(x,y) = y^2\,dx + x^2\,dy$ sea nula.

   Solución: $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$ $(a \in \mathbb{R},\ r > 0)$.

7. Calcular $\displaystyle\int_\gamma x\,dx + y\,dy + z\,dz$ a lo largo del arco de hélice de ecuaciones paramétricas $x = 4\cos\lambda$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,\lambda$, $z = 3\lambda$, para $0 \le \lambda \le 2\pi$.

   Solución: $18\pi^2$.

8. Evaluar $\displaystyle\int_\sigma y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$ para cada una de las trayectorias $\sigma(t) = (t,t^n,0)$ $\quad(0 \le t \le 1,\ n \in \mathbb{N})$.

   Solución: $\dfrac{3}{4} - \dfrac{n-1}{n+1}$.

9. Calcular $\oint_\gamma (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz$, siendo γ el camino cuya imagen viene dada por

$$\left.\begin{array}{ll} x^2+y^2-2pz & =0 \\ x+y-z+p & =0 \end{array}\right\}$$

con una orientación cualquiera.

Solución: 0.

10. Averiguar si la forma diferencial $(e^x y^2+3x^2y)\,dx+(2ye^x+x^3)\,dy$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

Solución: $\Phi(x,y)=e^x y^2+x^3y+C$.

11. Averiguar si la forma diferencial $2xyz\,dx+(x^2z+2ye^z)\,dy+(x^2y+y^2e^z)\,dz$ admite función potencial, y calcularla en caso afirmativo.

Solución: $\Phi(x,y,z)=x^2yz+y^2e^z+C$.

12. Sean las funciones $P(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$, y las curvas $\gamma_1: x=\cos\lambda,\ y=\operatorname{sen}\lambda \quad (0\le\lambda\le\pi)$, $\gamma_2: x=-\cos\mu,\ y=\operatorname{sen}\mu \quad (\pi\le\mu\le 2\pi)$. Se pide:

(a) Comprobar que en todo $\mathbb{R}^2$, excepto en el origen de coordenadas, se cumple $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

(b) Decidir razonadamente si se verifica $\displaystyle\int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy=\int_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy$.

(c) Calcular ambas integrales por separado.

Solución: (c) $\displaystyle\int_{\gamma_1} P\,dx+Q\,dy=-\pi$, $\displaystyle\int_{\gamma_2} P\,dx+Q\,dy=\pi$.

13. Sea $\mathbf{F}=(xy,y,z)$. ¿Puede existir una función f tal que $\mathbf{F}=\nabla f$?.

Solución: No.

14. Sea $\mathbf{F}(x,y,z)=(z^3+2xy,x^2,3xz^2)$. Probar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perímetro del cuadrado con vértices en $(1,1,5)$, $(-1,1,5)$, $(-1,-1,5)$, $(1,-1,5)$, es nula.

15. Sea $\mathbf{F}=(e^x\operatorname{sen}y,e^x\cos y,z^2)$. Evaluar $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{F}\cdot\,ds$, donde $\sigma(t)=(\sqrt{t},t^3,e^{\sqrt{t}})$ $(0\le t\le 1)$.

Solución: $e\operatorname{sen}1+\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{1}{3}$.

16. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_\gamma (6xy+y)\,dx+(3x^2+x)\,dy$, siendo:

(a) $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ $(1\le t\le 2)$, recorrido con la orientación canónica.

(b) γ cualquier camino de clase C^1 a trozos, uniendo $A(1,1)$ con $B(1,8)$.

(c) γ un camino cerrado cualquiera de clase C^1 a trozos.

Solución: (a) 412; (b) 28; (c) 0.

17. Calcular la integral curvilínea $\displaystyle\int_\gamma yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz$, siendo:

(a) $\gamma(t)=(t,t^2,t^3)$ $(0\le t\le 1)$, recorrido con la orientación canónica.

(b) $\gamma(t)=(\cos t,\ \operatorname{sen}t,\ \operatorname{tg}t)$ $(0\le t\le\dfrac{\pi}{4})$, con la orientación canónica.

(c) γ cualquier camino de clase C^1 a trozos, uniendo $A(1,-1,2)$ con $B(-2,-1,1)$.

(d) γ un camino cerrado cualquiera de clase C^1 a trozos.

Solución: (a) 1; (b) $\dfrac{1}{2}$; (c) 4; (d) 0.

18. Sea D un dominio simplemente conexo de $\mathbb{R}^2$, y sea $f(x,y)$ una función de clase C^2 en D. Probar que la condición de que f sea armónica en D (es decir, satisfaga $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$) es suficiente para que $\displaystyle\oint_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}\, dy - \frac{\partial f}{\partial y}\, dx = 0$ cualquiera que sea la curva simple, cerrada y rectificable γ contenida en D.

19. Sean γ, γ^* dos curvas simples cerradas del plano OXY, disjuntas entre sí, positivamente orientadas, y tales que γ^* está contenida en el recinto encerrado por γ. Sean $P(x,y)$, $Q(x,y)$ dos funciones de clase C^1 en un abierto A que contenga a ambas curvas y a la región entre ellas, satisfaciendo $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. Probar que se verifica

$$\int_\gamma P\, dx + Q\, dy = \int_{\gamma^*} P\, dx + Q\, dy.$$

20. Calcular

$$\oint_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}\, dx - \frac{x}{x^2+y^2}\, dy,$$

siendo γ la elipse de ecuación paramétrica $x = 4\cos\lambda,\ y = 3\,\mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \le \lambda \le 2\pi)$.

Solución: -2π.

21. Usar el teorema de Green para evaluar $\displaystyle\int_{C^+} (y^2 + x^3)\, dx + x^4\, dy$, donde C^+ es el perímetro de $[0,1]\times[0,1]$ en dirección antihoraria.

Solución: 0.

22. Usar el teorema de Green para calcular el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución: πab.

23. Usando el teorema de Green, hallar el área del recinto interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta\ (0 \le \theta \le 2\pi)$.

Solución: $\dfrac{3\pi}{2}$.

24. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^2$ $\mathbf{W}(x,y) = (\dfrac{1}{1+y}, -\dfrac{1}{1+x})$ a lo largo del camino $\gamma(t) = (t, t^2)$ $(0 \le t \le 1)$, dotado de la orientación canónica.

Solución: $\dfrac{\pi}{4} - 2 + 2\ln 2$.

25. Calcular el trabajo del campo de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\mathbf{W}(x,y,z) = (2y, x, z)$ a lo largo del camino $\gamma(t) = (t^{1/2}, t^{-1/2}, t)$ $(1 \le t \le 2)$, dotado de la orientación canónica.

Solución: $\dfrac{3}{2} + \ln\sqrt{2}$.

26. Se considera el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. Hallar el trabajo de $\mathbf{F}$ a lo largo de las curvas:

    (a) $\gamma_1 : y = x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.
    (b) $\gamma_2 : y = x^2$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.
    (c) $\gamma_3 : y = x^3$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.
    (d) $\gamma_4 : y = x^3(x-1)\log(x+2) + x$, entre los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$.

Solución: 1, en todos los casos.

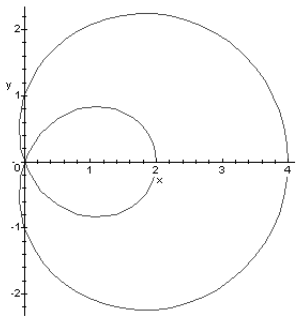
27. Hallar el trabajo realizado por una partícula sometida al campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$ que recorre la circunferencia unidad en sentido antihorario.

Solución: $\dfrac{3\pi}{2}$.

28. Se consideran el campo vectorial $\mathbf{F} = \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}$ y la curva γ de ecuación $x = \lambda,\ y = \lambda^3 + \lambda^2 - 1,\ z = \lambda + 3$. Calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de γ desde el punto $(-1,-1,2)$ al punto $(1,1,4)$.

Solución: $56 - \pi$.

29. Sea $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial de clase C^1 en $M = \mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0)\}$, tal que $P\,dx + Q\,dy$ admite función potencial en todo dominio simplemente conexo contenido en M. Sabiendo que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = -13\ \mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$ es de 5 julios, mientras que el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de la figura es de 18 julios, calcular el trabajo necesario para llevar una masa unidad a lo largo de la curva de ecuación $x = 13\cos\lambda,\ y = 9\ \mathrm{sen}\,\lambda\ (0 \leq \lambda \leq \pi)$.

Solución: 14 julios.

Ejercicio 29