ANALISIS COMPLEJO

Curso 01/02

Problemas

1. Sea f una función entera y supongamos que en toda serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

al menos un coeficiente es 0. Probar que f es un polinomio.

2. Supongamos que f es una función entera, y

$$|f(z)| \leq A + B|z|^k$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, donde A, B y k son positivos. Demostrar que f debe ser un polinomio.

3. ¿Qué se puede decir de dos funciones enteras f y g tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \mathbb{C}$?.

4. Sean f y g holomorfas en el disco unidad abierto, ambas sin ceros. Si

$$\frac{f'}{f}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

encontrar una relación simple entre f y g.

5. Sean $f_1,\ f_2, \ldots, f_n$ holomorfas en un dominio Ω del plano y denotemos por $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ su determinante Wronskiano. Probar que $f_1,\ f_2, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes en Ω si, y sólo si, $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \equiv 0$ en Ω.

6. Si f es holomorfa en $\Omega^{abto} \subset \mathbb{C}$, la fórmula de Cauchy para las derivadas de f,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

es válida bajo ciertas condiciones en z y Γ. Enunciar éstas y probar la fórmula.

7. Determinar las regiones en las que las siguientes funciones están definidas y son holomorfas

   (a) $f(z) = \int_0^1 \frac{dt}{1+tz}$,

   (b) $g(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{tz}}{1+t^2} dt$,

(c) $h(z) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{tz}}{1+t^2} dt$.

8. Sea f holomorfa en Ω, $\bar{D}(a,r) \subset \Omega$ y γ la circunferencia positivamente orientada de centro a y radio r. Para $p = 0, 1, 2, \ldots$, ¿Cuál es el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} z^p dz,$$

si $f \neq 0$ en γ? ¿Cuál es la respuesta si z^p se reemplaza por una función holomorfa ϕ arbitraria?

9. Sea f una función holomorfa en un entorno del disco $|z| \leq 4$ que no de anula en su frontera y que satisface

$$\int_{|\zeta|=4} \zeta^k \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = 2^{k+2}\pi i$$

para $k = 0, 1, 2$. Encontrar todos los ceros de f.

10. Sea $A = \{z : 1 < |z| < 2\}$. Probar que $H_1(A; \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ como espacios vectoriales.

11. Sea $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, Ω contiene el disco unidad, $|f(z)| > 2$ si $|z| = 1$ y $f(0) = 1$. ¿Debe f tener un cero en el disco unidad?

12. Sean $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ n complejos distintos y consideremos la función

$$f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdot (z - a_2)^{m_2} \cdots (z - a_n)^{m_n}.$$

Probar que f admite un logaritmo analítico en $\mathbb{C} \backslash \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ si, y sólo si

$$m_1 Ind_\gamma(a_1) + m_2 Ind_\gamma(a_2) + \cdots + m_n Ind_\gamma(a_n) = 0,$$

para todo camino cerrado γ que no pase por los puntos $a_k, k = 1, 2 \ldots n$.

13. Sea $A = \{z : 1 < |z| < 2\}$ y $f \in \mathcal{O}(A)$ sin ceros en A. Demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ y $h \in \mathcal{O}(A)$ tal que

$$f(z) = z^k e^{h(z)}.$$

14. Sea Ω un dominio en el plano complejo y (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω. Si ninguna de las funciones f_n tiene ceros en Ω y $f_n \to f$ uniformemente en compactos de Ω, probar que f no tiene ceros en Ω ó $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.

Si ω es un dominio tal que $f_n(\Omega) \subset \omega$ para todo $n = 1, 2, 3, \cdots$, y f no es constante, demostrar que $f(\Omega) \subset \omega$.

15. Sea $R > 0$ y f holomorfa en $\bar{D}(0, R)$ con $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ y $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| \leq R$. Sea $\rho = \inf\{|f(z)| : |z| = R\}$ y definamos

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - z} d\zeta, \qquad |z| < \rho.$$

Probar que g es holomorfa en $D(0, \rho)$ y discutir sus propiedades respecto a f.

16. Sea f holomorfa en un entorno del disco unidad cerrado. Si $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, demostrar que existe un único z_0 con $|z_0| < 1$ tal que $f(z_0) = z_0$. ¿Qué se puede decir si relajamos la condición anterior a $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$?

17. Sea a real, $a > 1$. Probar que la ecuación

$$ze^{a-z} = 1$$

tiene una única solución con $|z| \leq 1$ que es real y positiva.

18. Determinar el número de raíces del polinomio $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ en el anillo cerrado $1 \leq |z| \leq 2$.

19. Demostrar que todos los ceros del polinomio

$$p(z) = 3z^3 - 2z^2 + 2iz - 8$$

están en el anillo $1 < |z| < 2$.

20. Sea p un polinomio mónico holomorfo de grado n con todas sus raices en la circunferencia unidad $|z| = 1$. Demostrar que

    (a)
    $$max_{|\zeta|=1}|p(\zeta)| \geq 2.$$

    (b) Si además se verifica la igualdad en (a) entonces

    $$p(z) = z^n + a,$$

    con $|a| = 1$.

21. Siendo f una función entera, resolver

    (a)
    $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \bar{z} f(z),$$

    (b)
    $$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f(\bar{z}).$$

22. Sea $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función C^∞ de soporte compacto. Encontrar condiciones en ϕ para que la ecuación
$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi(|z|)$$
tenga soluciones con soporte compacto.

23. Sea ϕ como en el problema anterior tal que $sop\,\phi \subset (1, \infty)$ y f una función holomorfa en el disco unidad cerrado tal que $f(0) = 0$. Demostrar que la ecuación
$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi(|z|) f\left(\frac{z}{|z|}\right)$$
tiene una única solución con soporte compacto.

24. Encontrar el valor de las siguientes integrales y series

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx \qquad t \in \mathbb{R},$$

(b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2} \qquad |\alpha| \neq 1,$$

(c)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } x}{x} dx,$$

(d)
$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} \qquad n = 2, 3, \ldots,$$

(e)
$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \qquad a > 0,$$

(f)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^2} dx \qquad 0 < a < 2,$$

(g)
$$\int_0^1 (1 - x^n)^{-1/n} dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(h)
$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + sen^2\theta},$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 + n^2} \qquad a \geq 0,$$

(j)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n^4}.$$

25. Demostrar que toda función holomorfa en $\mathbb{C}_\infty$ es racional.

26. Demostrar que la familia $\mathcal{F}$ de aquellas funciones holomorfas f en el disco unidad abierto Δ tal que

$$\int_\Delta |f'(\zeta)|^2 dA(\zeta) \leq 1, \qquad |f(0)| \leq 1$$

es normal. ¿Puede suprimirse la condición $|f(0)| \leq 1$ y aún tener la misma conclusión?.

27. Sea $\mathcal{F} = \{f_n\}$ una sucesión de funciones holomorfas localmente acotada en un abierto Ω y sea $A \subset \Omega$ con $A' \cap \Omega \neq \emptyset$. Probar que si $f_n \to f$ puntualmente en A entonces f admite una única extesión holomorfa $\tilde{f}$ en Ω tal que $f_n \to \tilde{f}$ en subconjuntos compactos de Ω.

28. Sea $\Omega = \{z = x + iy \,:\, -1 < y < 1\}$, $f : \Omega \mapsto \Delta$ y $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Demostrar que

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x+iy) = 0 \qquad -1 < y < 1,$$

y que el límite es uniforme si y varía en subconjuntos compactos del intervalo $(0, 1)$.

29. Sea f holomorfa en el disco unidad abierto y $f(0) = 0$. ¿Dónde es holomorfa la función $g(z) = f(z) + f(z^2) + f(z^3) + \cdots$?

30. Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\Delta = \{z \,:\, |z| < 1\}$ tal que $f(0) \neq 0$. Demostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $0 < |\lambda| < \epsilon$, la ecuación $z^m = \lambda f(z)$ tiene exactamente m *soluciones distintas.*

31. (a) Sea $K \subset \mathbb{C}$ un subconjunto compacto con complementario conexo y $z_0 \notin K$. Probar que existe un polinomio holomorfo p tal que $p(z_0) = 1$ y $|p(z)| < \frac{1}{2}$ para todo $z \in K$.

    (b) ¿Existe alguna función F continua en $|z| \leq 1$, holomorfa en $|z| < 1$ tal que la imagen de la circunferencia $|z| = 1$ sea precisamente la figura "ocho", es decir, la unión de dos circunferencias tangentes en un punto?

32. Sea f holomorfa en Δ y continua en $\bar{\Delta}$. Si W es cualquier componente de $\mathbb{C}\backslash f(\partial\Delta)$ probar que,

    (a) si $W \cap f(\Delta) \neq \emptyset$ entonces $W \subset f(\Delta)$ y

    (b) para todo $w \in W$, el conjunto $\{z \,:\, f(z) = w\}$ es finito.

    (c) $f(\bar{\Delta}) \subset \hat{K}$, (la envolvente polinomial de K).

(d) ¿Es cierto el otro contenido en (c)?.

33. Sea $\Omega = \{z : |z| < 1,\ |2z-1| > 1\}$ y f holomorfa en Ω.

    (a) ¿Existe una sucesión de polinomios holomorfos que converge a f uniformemente en compactos de Ω?

    (b) ¿Existe una tal sucesión que converge uniformemente en todo Ω?

    (c) ¿Cambia la respuesta en (b) si se requiere que f sea holomorfa en algún abierto que contiene a la clausura de Ω?

34. ¿Existe una sucesión de polinomios holomorfos $\{P_n\}$ tal que $P_n(0) = 1$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ pero $P_n(z) \to 0$ cuando $n \to \infty$ para todo $z \neq 0$?

35. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| > 1$ y Δ el disco unidad abierto.

    (a) Dado $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, ¿Existe un polinomio holomorfo P tal que $||P-1|| < \varepsilon$ en $\bar{\Delta}$ y $|P^{(k)}(z_0)| < \varepsilon$ para $k = 0, 1, 2, \ldots, N$?

    (b) ¿Qué sucede si en (a) relajamos la condición sobre el número de derivadas hasta ∞?

36. Sean K_1 y K_2 dos subconjuntos compactos del plano tales que $K_1 \subset K_2$ y toda función holomorfa en un entorno de K_2 pueda ser aproximada por polinomios en K_1, ¿es cierto que toda función holomorfa en un entorno de K_1 puede ser aproximada por polinomios en K_1?

37. Dar un ejemplo de un suconjunto compacto K y dos dominios Ω_1, Ω_2 tal que $K \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ y $\hat{K}_{\Omega_1} \neq \hat{K}_{\Omega_2}$.

38. Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano y $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto. Demostrar que la envolvente polinomial $\hat{K}$ de K sigue siendo un subconjunto compacto de Ω. Deducir que $\hat{K} = \hat{K}_\Omega$.

39. (a) Sea Ω un dominio del plano, $a \in \Omega$ y f holomorfa en $\Omega \backslash \{a\}$ tal que $f(\Omega \backslash \{a\}) = G$ es acotado. Probar que f tiene una singularidad evitable en $z = a$. Si además f es inyectiva, demostrar que $f(a) \in \partial G$.

    (b) Demostrar que no existe una función holomorfa biyectiva que aplique $\Omega = \{z : 0 < |z| < 1\}$ sobre el anillo $G = \{z : r < |z| < R\}$, $0 < r < R$.

40. Sea K un subconjunto compacto conexo de $\mathbb{C}$ y D una región acotada del plano. Probar que

    (a) $\hat{K}$ (la envolvente polinomial de K) es también conexa.

    (a) Toda componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \backslash K$ es simplemente conexa.

    (b) D es simplemente conexa si, y sólo si, ∂D es conexo.

41. Sea Ω una región del plano. Se dice que (Δ, f) con $f : \bar{\Delta} \to \mathbb{C}$ holomorfa en Δ y continua en $\bar{\Delta}$ es un disco con borde en Ω si $f(\partial\Delta) \subset \Omega$. Probar que

    (a) Ω es simplemente conexo si, y sólo si, $\hat{K} \subset \Omega$ para todo compacto $K \subset \Omega$ ($\hat{K}$ es la envolvente polinomial de K).

    (b) Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto conexo. Entonces K es polinomialmente convexo si, y sólo si, K tiene una base de entornos simplemente conexos.

    (c) Ω es simplemente conexo si, y sólo si, para todo disco (Δ, f) con borde en Ω se tiene que $f(\Delta) \subset \Omega$.

42. Sea Ω una región simplemente conexa, f holomorfa en Ω sin ceros y n un entero positivo. Probar que existe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $g^n = f$.

43. Sea Ω un dominio del plano (no necesariamente simplemente conexo), $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sin ceros. Probar que f admite un logaritmo holomorfo en Ω si, y sólo si, f tiene raíces holomorfas de cualquier orden.

44. Comprobar que toda aplicación biholomorfa de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ es lineal afín, ésto es, de la forma $az + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ y $a \neq 0$.

45. Sea R una función racional tal que $|R(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Demostrar que

$$R(z) = cz^m \prod_{n=1}^{k} \frac{z - a_n}{1 - \bar{a}_n z}$$

    donde c es una constante, m es entero y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números complejos tales que $a_n \neq 0$ y $|a_n| \neq 1$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

46. Una función continua $f : \Omega \to \Omega$ con $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice propia si $f^{-1}(K) \subset \Omega$ es compacto para todo $K \subset \Omega$ compacto. Probar que las funciones enteras propias son precisamente los polinomios. Asimismo, demostrar que todas las aplicaciones holomorfas propias del disco unidad son los productos finitos de Blaschke, a saber, las funciones de la forma

$$f(z) = \lambda \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z},$$

    donde $n \in \mathbb{N}$ y $|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n| < 1$ y $|\lambda| = 1$.

47. (a) Sea $\Omega = \{ z : -1 < Re z < 1\}$. Encontrar una expresión explícita para una transformación conforme f de Ω sobre el disco unidad Δ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) > 0$. Computar $f'(0)$.

    (b) Comprobar que la inversa de f construída en el apartado (a) tiene parte real acotada en Ω, mientras que su parte imaginaria no lo es. Deducir que ésto implica que existen funciones continuas u en $\bar{\Delta}$ armónicas en Δ cuya armónica conjugada no es acotada en Δ.

48. (a) Supongamos que f, g son funciones holomorfas de Δ (disco unidad) en Ω, que f es inyectiva, $f(\Delta) = \Omega$ y $f(0) = g(0)$. Demostrar que

$$g(\Delta(0,r)) \subset f(\Delta(0,r)), \qquad 0 < r < 1.$$

Nótese que este enunciado se reduce al Lema de Schwarz cuando $\Omega = \Delta$ y $f(z) = z$.

(b) Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\mathbb{R}ef(z) > 0$ para todo $z \in \Delta$ y $f(0) = 1$. Utilizar el apartado anterior para encontrar estimaciones de $|f(z)|$ para $|z| \leq r < 1$.

49. Sea $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ inyectiva, $f(\Delta) = \Omega$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Probar que el área de Ω es igual a

$$A(\Omega) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2.$$

Ayuda: Computar el Jacobiano de f.

50. Probar un teorema análogo al de reflexión de Schwarz bajo las siguientes hipótesis:

(a) $\Omega \subset \Pi^+$, $L \subset \mathbb{R}$ y $|f(z)| \to 1$ cuando $z \to L$,

(b) $\Omega \subset \Delta$, $L \subset \mathbb{T} = \partial\Delta$ y $|f(z)| \to 1$ cuando $z \to L$,

(c) $\Omega \subset \Delta$, $L \subset \mathbb{T}$ y $Imf(z) \to 0$ cuando $z \to L$.

En el caso (b), si f tiene un cero en $\alpha \in \Omega$, demostrar que su extensión tiene un polo en $1/\bar{\alpha}$. ¿Cuál es el análogo a esta propiedad en los casos (a) y (c)?

51. Denotemos por $\Delta^+ = \{z : |z| < 1, Im(z) > 0\}$ y $\Delta^- = \{z : |z| < 1, Im(z) < 0\}$. Sean $f \in \mathcal{O}(\Delta^+) \cap \mathcal{C}(\bar{\Delta}^+)$, $g \in \mathcal{O}(\Delta^+) \cap \mathcal{C}(\bar{\Delta}^+)$. Probar que si f y g coinciden sobre el eje real, entonce existe $h \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}(\bar{\Delta})$ tal que $h = f$ en Δ^+ y $h = g$ en Δ^-.

52. (a) Probar que la función $\zeta \to \zeta + 1/\zeta$ es una aplicación biholomorfa del complemento del disco unidad cerrado sobre $\mathbb{C}\backslash[-2, 2]$.

(b) ¿Cuál es la imagen de la circunferencia unidad bajo esta aplicación?

53. (a) Sean u, v funciones armónicas reales en una región plana Ω. Encontrar condiciones para que la función uv sea también armónica.

(b) Probar que si u y u^2 son armónicas en Ω entonces $u = const.$

(c) ¿Para qué funciones holomorfas $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es $|f|^2$ armónica en Ω?

54. Sea $h(z) = e^x(xcosy - yseny)$, $z = x + iy$. Probar que h es armónica en $\mathbb{C}$ y encontrar una función entera f tal que $h = Ref$.

55. Probar que los ceros de las funciones armónicas reales nunca son aislados.

56. Sea h una función armónica real en el anillo $0 < r < |z| < R$. Usando el hecho de que ∂h es holomorfa, demostrar que existen unas únias constantes a_n, b con a_0, $b \in \mathbb{R}$ tales que

$$h(z) = Re\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) + blog|z|.$$

57. (a) Demostrar que si f es una función holomorfa en un entorno de $\bar{\Delta}(0,r)$, y $u = Ref$ entonces

$$f(z) - f(0) = \int_0^{2\pi} \frac{2z}{re^{i\theta} - z} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Ayuda: Probar primero que las partes reales coinciden.

(b) Probar la desigualdad de Borel-Carathéodory:

$$M_f(\rho) \leq \frac{2\rho}{r-\rho} A_f(r) + \frac{r+\rho}{r-\rho}|f(0)|, \qquad 0 \leq \rho < r.$$

Aquí,

$$M_f(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)| \;\; y \;\; A_f(\rho) = \sup_{|z|=\rho} Ref(z).$$

(c) ¿ Qué se puede decir de una función u real armónica en todo $\mathbb{C}$ tal que $|u(z)| \leq 1 + |z|^\gamma$ $(z \in \mathbb{C})$, para alguna constante real γ?

58. Probar que si h es una función armónica positiva en $\Delta(0,r)$ entonces

$$|\nabla h(0)| \leq \frac{2}{r} h(0),$$

y así deducir que

$$|\nabla h(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2} h(z) \qquad |z| < r.$$

59. Sea (h_n) una sucesión de funciones armónicas positivas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ que convergen puntualmente en un subconjunto abierto de D. Probar que (h_n) converge en subconjuntos compactos de D.

60. Sea h una función armónica en un entorno de $\bar{\Delta}(0,R)$ y para $0 \leq r \leq R$ definamos

$$M_h(r) = \sup_{|z|=r} h(z).$$

Probar que se verifica la desigualdad convexa

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{R+r} M_h(R) + \frac{R-r}{R+r} h(0).$$

Deducir la siguiente generalización del Teorema de Liouville: Si h es armónica en $\mathbb{C}$ satisface

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{M_h(r)}{r} \leq 0,$$

entonces h es constante.

Ayuda: Aplicar las desigualdades de Harnack.

61. Sean u_1, u_2 ..., u_n funciones subarmónicas en un dominio $D \subset \mathbb{C}$ y suponamos que su suma $u_1+u_2+\cdots u_n$ alcanza su máximo en D. Probar que cada función u_k es armónica en D.

62. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 tal que para toda función armónica $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, la función $f \circ u$ es también armónica. ¿Qué se puede decir de f?

63. Sea u una función subarmónica en el disco unidad abierto Δ tal que $u < 0$. Probar que para cada $\zeta \in \partial\Delta$ se tiene

$$\limsup_{r\nearrow 1^-} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0.$$

Ayuda: Comparar, por el principio del máximo, con la función $v(z) := c \log |z|$ en el anillo $\frac{1}{2} < |z| < 1$ para una constante c apropiada.

64. Sea f una función compleja definida en una región Ω tal que f y f^2 son armónicas. Demostrar que f es holomorfa o antiholomorfa.

65. (a) Si u es real armónica en una región Ω, ¿qué se puede decir del conjunto de puntos donde su gradiente se anula?

    (b) Demostrar que si u es real armónica en Δ y $u(re^{i/n}) = 0$ para todo $0 < r < 1$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $u = 0$.

66. Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ no tiene ceros en Ω. Demostrar que $log|f|$ es armónica en Ω computando su Laplaciano. ¿Existe alguna forma mas sencilla para ver ésto?

67. Sea u una función localmente integrable en una región plana Ω. Probar que u es armónica en Ω si, y sólo si, satisface la propiedad de valor medio

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int\int_{\Delta(a,r)} u(\zeta) dA(\zeta),$$

siempre que $\bar{\Delta}(a, r) \subset \Omega$.

68. Sea u una función armónica positiva en Δ con $u(0) = 1$. Estimar superior e inferiormente $u(1/2)$. Dar cotas lo mas óptimas posibles.

69. ¿Para qué par de líneas L_1 y L_2 existe una función real armónica no indénticamente nula que se anula en $L_1 \cup L_2$?

70. Enunciar y probar un teorema análogo al de Liouville para funciones armónicas.

71. (a) Probar que si $u, v \in C^2(\bar{U})$ con U una región acotada con frontera suave, entonces

$$\int\int_U (u\Delta v - v\Delta u)\, dA = \int_{\partial U} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) ds,$$

donde $\mathbf{n}$ denota la normal exterior a U en ∂U, dA es la medida de área y ds la longitud de arco sobre ∂U.

(b) Con $U = \Delta \backslash \bar{\Delta}(0, \varepsilon)$, $v(\zeta) = log\frac{1}{|\zeta|}$ y $\varepsilon \searrow 0$ deducir que

$$u(0) = \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int\int_{\Delta} \Delta u(\zeta) log\frac{1}{|\zeta|} dA(\zeta).$$

(c) Componiendo con automorfismos holomorfos de Δ deducir una fórmula análoga para $u(z)$ con $z \in \Delta$.

(d) Utilizar el resultado obtenido en (c) para resolver explícitamente el problema de Poisson

$$\left.\begin{array}{rcl} \Delta u & = & f,\ \Delta \\ u & = & g,\ \partial\Delta \end{array}\right\}$$

donde $f \in C(\bar{\Delta})$ y $g \in C(\partial\Delta)$.

72. Probar que toda función armónica radial en $\Delta^* = \Delta \backslash \{0\}$ es de la forma $u(z) = Alog|z| + B$, con A y B constantes adecuadas.

73. Encontrar, si existen, aquellas funciones armónicas de la forma

(a) $u(x, y) = \phi(x)$,

(b) $u(x, y) = \phi(ax + b) \qquad a, b \in \mathbb{R}$,

(c) $u(x, y) = \phi(xy)$.

74. Sea u armónica en $\Delta^* = \{z : 0 < |z| < 1\}$ y continua en Δ. Probar que existe $\tilde{u}$ armónica en Δ tal que $\tilde{u} = u$ en Δ^*.

75. Si u es armónica real en $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y homogénea de grado $m \neq 0$, demostrar que

$$v = \frac{1}{m}\left(y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

es una armónica conjugada de u.

76. ¿Es el grupo de automorfismos de cualquer región simplemente conexa Ω transitivo? Transitividad significa que para todo par de puntos $a, b \in \Omega$ existe $f \in Aut(\Omega)$ tal que $f(a) = b$.

77. Sea Ω una región plana, $a \in \Omega$ y $f : \Omega \mapsto \Delta$ una transformación conforme con $f(a) = 0$ y $f'(a) = i$. Construir otra transformación conforme g de Ω en Δ tal que $g(a) = 1/2$ y $g'(a) > 0$. Calcular $g'(a)$.

78. Sea Ω una región plana simplemente conexa y $a \in \Omega$. Demostrar que existe un único $r \in (0, +\infty]$ y una única transformación conforme f de Ω en $\Delta(0, r)$ tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) = 1$.

79. Si Ω es una región plana y f, g son dos transformaciones conformes de Ω sobre Δ tales que $f(a) = g(a) = 0$ y $f'(a) = g'(a)$ para algún $a \in \Omega$, ¿qué relación debe existir entre f y g?

80. Sea Ω un dominio tal que $0 \in \Omega$, y si $z \in \Omega$ entonces $iz \in \Omega$. Demostrar que si f es una trasformación conforme de Δ en Ω con $f(0) = 0$ entonces $f(iz) = if(z)$ para todo $z \in \Delta$.

81. (a) Sea Ω una región simplemente conexa y f una aplicación de Riemann que la lleva sobre Δ con $f(a) = 0$ y $a \in \Omega$. Si g es cualquier función holomorfa de Ω en Δ con $g(a) = 0$, probar que $|g'(a)| \leq |f'(a)|$. ¿Qué sucede si se da la igualdad?

    (b) Si en (a) suponemos además que g es biyectiva, ¿qué relación debe existir entre f y g?

    (c) Sea $f : \Delta \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\mathbb{R}ef(z) > 0$ para todo $z \in \Delta$ y $f(0) = 1$. Estimar superiormente $|f'(0)|$ con una cota lo más óptima posible.

82. (a) Encontrar todas las funciones enteras f, g que cumplen la ecuación $e^f + e^g = 1$ en todo $\mathbb{C}$.

    (b) ¿Es cierto que toda función entera impar es sobreyectiva?

    Ayuda: Usar el Teorema pequeño de Picard.