# Tema 2: SERIES DE FOURIER

1. Determinar el desarrollo de Fourier de las siguientes funciones:
   a) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$ b) $f(x) = ax^2 + bx + c$ c) $f(x) = e^{ax}$
   d) $f(x) = \cos ax$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ e) $f(x) = cosh\, x$

2. **Desarrollos de Fourier seno y coseno.**

   Dada $f(x)$ una función definida en el intervalo $[0, \pi]$, podemos asociarle, y en su caso hasta representarla, un desarrollo de Fourier que puede tener sus elementos fijados a priori.

   **Desarrollo coseno.** Si extendemos $f$ a todo el intervalo $[-\pi, \pi]$ tomando su defínción **par**, esto es,

   $$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases},$$

   su desarrollo de Fourier verifica que $b_k = 0$ para todo $k$ y los $a_k$ dependen únicamente de los valores de $f$ en $[0, \pi]$. Justifica estas afirmaciones.

   **Desarrollo seno.** Si extendemos $f$ a todo el intervalo $[-\pi, \pi]$ tomando su defínción **impar**, esto es,

   $$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases},$$

   la situación es la contaria, su desarrollo de Fourier verifica que $a_k = 0$ para todo $k$ y los $b_k$ dependen únicamente de los valores de $f$ en $[0, \pi]$. Justifica estas afirmaciones.

   **a)** Determinar los desarrollos de Fourier coseno de las siguientes funciones

   i) $f(x) = \operatorname{sen} ax$, $(0 \le x \le \pi)$ $(a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ ii) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le l \\ 0, & l < x \le \pi \end{cases}$

   iii) $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2l}, & 0 \le x \le 2l \\ 0, & 2l < x \le \pi \end{cases}$

   **b)** Determinar los desarrollos de Fourier seno de las siguientes funciones

   i) $f(x) = \cos x$, $(0 \le x \le \pi)$ ii) $f(x) = x^3$, $(0 \le x \le \pi)$

   iii) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, & 0 \le x < l/2 \\ 0, & l/2 < x \le l \end{cases}$ iv) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, & 0 \le x < l/2 \\ -\operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, & 2l < x \le \pi \end{cases}$

3. Sea $f$ definida en $[-\pi, \pi]$ con serie de Fourier

   $$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

   Probar que existen funciones par $f_p$ e impar $f_i$ en $[-\pi, \pi]$ tales que $f = f_p + f_i$ y

   $$\begin{aligned} f_p &\sim \tfrac{a_0}{2} + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_k \cos kx \\ f_i &\sim \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx \end{aligned}$$

4. Determinar el desarrollo de Fourier de $f(x-\pi)$ en función del desarrollo de $f$, entendiendo que $f$ es una función definida en $[-\pi,\pi]$ que ha sido extendida a todo $\mathbb{R}$ periódicamente.

5. Sea $h(x)=f(x)\cos x$, expresar los coeficientes de Fourier de $h(x)$ en función de los coeficientes de $f$.

6. Probar que toda función $f\in L^2([-\pi,\pi])$ admite que su desarrollo de Fourier se exprese de las dos formas siguientes:

$$i)\ f\sim A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_k\cos(kx-\alpha_k)\quad ii)\ f\sim\sum_{n=1}^{\infty}B_k\,\text{sen}\,(kx-\beta_k)$$

   con $-\frac{\pi}{2}<\alpha_k,\beta_k\leq\frac{\pi}{2}$.

7. Sea $f$ definida en $[-\pi,\pi]$ y consideremos su extensión periódica a todo $\mathbb{R}$. Supongamos que $f$ satisface la condición de Lipschitz de orden $\alpha$

$$|f(x)-f(y)|\leq c|x-y|^{\alpha},\ \ \forall x,y\in[-\pi,\pi].$$

   Probar que los coeficientes de Fourier de $f$ verifican

$$|a_k|\leq\frac{c\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}},\qquad |b_k|\leq\frac{c\pi^{\alpha}}{k^{\alpha}}.$$

   AYUDA: Considerar el cambio de variable $x=\frac{\pi}{k}+t$.

8. Sea $f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx-\text{ sen }kx)$. ¿Qué podemos decir de la convergencia de esta sucesión?

9. ¿Existe $f\in L^2([-\pi,\pi])$ tal que $f\sim\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2}\cos kx+\frac{senh(k\pi)}{e^k}\,\text{sen }kx)$ ?

10. Probar de dos formas distintas que la mejor aproximación de $f$ al subespacio generado por $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\cos kx,\ \text{sen }kx\}_{k=1}^{n}$ es la suma parcial de Fourier $n$-ésima de $f$.

11. Sea $f\in C^1([-\pi,\pi])$. Expresar la serie de Fourier de $f'$ en términos de los coeficientes de Fourier de $f$.

12. Sea $f$ una función definida en $[-\pi,\pi]$ con extensión periódica a todo $\mathbb{R}$. Supongamos que $f$ es de clase $C^n(\mathbb{R})$ y su derivada $n+1$ es continua a trozos. Probar que en esta condiciones existe una constante $C>0$ dependiendo sólo de $f$ tal que

$$|a_k|\leq\frac{C}{k^{n+1}},\quad |b_k|\leq\frac{C}{k^{n+1}}.$$

13. Dadas $f,g\in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{R})$, expresar $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)\,dt$ en términos de sus coeficientes de Fourier.

14. Para cualquier $f \in L^2([-\pi,\pi])$, utilizar los desarrollos en serie de Fourier para dar una representación en serie, no necesariamente de funciones trigonométricas únicamente, de la función $\int_0^x f(t)dt$.

    **AYUDA:** Considerar en primer lugar el desarrollo de Fourier de la función $F(x) = \int_0^x (f(t) - \frac{a_0}{2})dt$ donde $a_0$ es el primer coeficiente de Fourier de $f$.

15. Dada $f \in L^2([0,\pi])$, probar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi f(t) \operatorname{sen}\ (k+\frac{1}{2})t\, dt = 0.$$

16. Si $D_n$ representa el núcleo de Dirichlet de orden n, calcular

    a) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) \operatorname{sen}\ 100t\, dt$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} (D_n(t))^2\, dt$

17. Calcular las siguientes sumas:

    a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k^2+1)^2}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

18. Calcular

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx$$

    en términos de los coeficientes de Fourier de $f$.

19. *Teorema de aproximación de Weierstrass.* Toda función continua en un intervalo finito $[a,b]$ puede ser aproximada uniformemente por polinomios.

    Probar este resultado. AYUDA: Trasladar el problema al intervalo $[0,\pi]$, extender la función a $[-\pi,\pi]$ con continuidad e igualdad en los extremos y aplicar los resultados de aproximación que conocemos.

20. Probar las siguientes igualdades trigonométricas:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}\ n}{n} = \frac{1}{2}$
    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n}{n^2} = \frac{\pi^2-3}{12}$
    (c) $\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

21. *Teorema de Localización de Riemann.* Sea $f \in L^1([-\pi,\pi])$, $x \in [-\pi,\pi]$ y $\delta > 0$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t))D_n(t)\, dt = 0.$$

    Probar este resultado.

22. Probar con dos argumentos distintos la siguiente afirmación: Si $f \in L^1([-\pi,\pi])$ es tal que $f \equiv 0$ en un entorno $(x-\delta, x+\delta)$ de un punto $x \in [-\pi,\pi]$ $(\delta > 0)$, entonces $s_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$ siendo, como es usual, $s_n(x)$ la suma parcial de Fourier de $f$.

23. Si dos funciones $f, g \in L^1([-\pi, \pi])$ verifican que $f \equiv g$ en un entorno $(x-\delta, x+\delta)$ de un punto $x \in [-\pi, \pi]$ $(\delta > 0)$, entonces sus series de Fourier en el punto $x$ convergen o divergen simultáneamente.

24. Probar que si $f \in L^2([-\pi, \pi])$ verifica que su serie de Fourier converge en casi todo punto, entonces necesariamente lo hace a $f$.

25. Representar $\pi$ como una serie numérica.

26. Calcular la suma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$.

27. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x - E[x], & x \notin \mathbb{Z} \\ 1/2, & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
donde $E[x]$ denota la parte entera de $x$.

    a) Hallar su serie de Fourier.

    b) ¿A qué valores converge su serie de Fourier en $x = 3$, $x = 5$ y $x = 1.5$?

28. Sea
$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi < x < 0 \\ \text{sen } x, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

    a) Determinar la serie de Fourier de $f$.

    b) Definimos
$$h(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt + a \,\text{sen}\, (\frac{x}{2}), \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$
    ¿Para qué valores de $a$ la serie de Fourier de $h$ converge uniformemente a $h$ en $[-\pi, \pi]$?.

29. Sea $f$ una función continua a trozos con serie de Fourier cuyos coeficientes satisfacen las desigualdades
$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{c}{k^2}.$$
    Probar que $f$ puede ser redefinida de forma que sea continua en $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y además su serie de Fourier es la de $f$ y converge uniformemente a $f$.

30. Sea $f \in L^1([-\pi, \pi])$ continua en $x_0$ y verificando que en un entorno de $x_0$
$$|f(x) - f(x_0)| \leq c|x - x_0|^{\alpha}$$
    para ciertas constantes $c, \alpha > 0$. Probar que la serie de Fourier de $f$ converge en $x_0$ a $f(x_0)$.