Tema 1: PRELIMINARES

1.1 Teoría básica de espacios de Hilbert.

A lo largo de esta sección denotaremos por $\langle f, g\rangle_2$ al producto interior

$$\langle f, g\rangle_2 = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

para f y g funciones definidas en el intervalo $[a, b]$.

1. Sea V un espacio vectorial donde hay definido un producto interior.
   (a) Probar que $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$.
   (b) Si $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$ es tal que $u_n \to u \in V$, entonces $\|u_n\| \to \|u\|$.
2. En $(C([-1, 2]), \mathbb{C})$ determinar cuál de las siguientes operaciones define un producto interior:
   (a) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{2} |f(x) + g(x)|dx$
   (b) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{2} f(x)\overline{g(x)}dx + f(-\frac{1}{2})g(-\frac{1}{2})$
   (c) $\langle f, g\rangle = 3\int_{-1}^{2} f(x)\overline{g(x)}dx$
   (d) $\langle f, g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + f(1)g(1)$
3. ¿Es
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)g''(x)dx + f(-\pi)g(-\pi)$$
   un producto interior en $(C^2([-\pi, \pi]), \mathbb{R})$?
4. Expresar en términos del producto interior $\langle f, g\rangle_2$ en $(C([a, b]), \mathbb{C})$ la relación integral
   $$\frac{1}{2}\int_a^b \int_a^b |f(x)g(y) - f(y)g(x)|^2 dxdy.$$
5. Probar de dos formas distintas la siguiente desigualdad integral
   $$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{1/2}.$$
6. Probar que para cualquier familia finita $\{x_k\}_{k=1}^n$ de números reales se tiene
   $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}.$$
   ¿Podemos prescindir del factor $\frac{1}{n}$?

7. Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio de los polinomios reales de grado menor o igual que dos. Definimos en $\mathcal{P}_2$ la operación
$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx.$$
   (a) Probar que esta operación define un producto interior en $\mathcal{P}_2$.
   (b) Probar que $\{1, 1-x, 1-2x+\frac{1}{2}x^2\}$ es un sistema ortonormal de $\mathcal{P}_2$.

8. Consideremos el espacio vectorial $(C^1([0,1]), \mathbb{C})$.
   (a) Probar que
$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f'(x)\overline{g'(x)}dx + f(0)\overline{g'(0)}$$
   define un producto interior en este espacio.
   (b) Determinar un sistema ortonormal que genere el mismo subespacio que el generado por el sistema $\{1, x, x^2\}$.

9. Sea $\{\phi_k\}_{k=1}^n$ un sistema ortonormal de $L^2([a,b])$ y W el subespacio que genera.
   a) Expresar, en términos de sus coeficientes de Fourier con resecpto al sistema dado, la distancia de cualquier función de $L^2([a,b])$ a cualquier elemento de W.
   b) Deducir de a) la forma del elemento de W más próximo a dicha función de $L^2([a,b])$.

10. a) *Desigualdad de Cauchy.* Probar para cualesquiera que sean los números reaales $\{a_i\}_{i=1}^n$ y $\{b_i\}_{i=1}^n$,
$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$
   b) Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ con $\sum_{i=0}^n a_i^2 = 1$. Probar que
$$\int_0^1 |P(x)|dx \leq \frac{\pi}{2}.$$
   ¿Se puede estimar por una constante más pequeña?

11. Un sistema infinito $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty \subset L^2([a,b])$, no necesariamente ortogonal, se dice que es *completo* si para cualquier $g \in L^2([a,b])$ y cualquier $\varepsilon > 0$ existen constantes $\{a_i\}_{i=1}^n$ tales que
$$\|g - (a_1\phi_1 + \cdots + a_n\phi_n)\|_2 < \varepsilon.$$
   Probar que la única función ortogonal a un sistema completo es la función cero.

12. Determinar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \alpha - \beta \cos x - \gamma \cos 10x|^2 dx$$

alcance su valor mínimo para las siguientes elecciones de $f(x)$: a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = 1 - 2\cos x$; c) $f(x) = |x|$.

13. a) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\text{sen } x}{\sqrt{2\pi}}\}$ es un sistema ortonormal de $((C([0, 2\pi]), \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$.

b) Determinar la mínima distancia de $f(x) = x$ al subespacio $\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\text{sen } x}{\sqrt{2\pi}} \rangle$

14. En $(C([-1, 1]), \mathbb{R})$ consideremos el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

(a) Probar que realmente esta operación define un producto interior en este espacio.

(b) Consideremos la familia de funciones $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$T_n(x) = \cos(n \, arccos \, x).$$

A $T_n(x)$ se le denomina *Polinomio de Chebyshev de grado n.*

Probar que $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal infinito de $(C([-1, 1]), \mathbb{R})$ con el producto interior anteriormente definido.

15. Probar que el sistema $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \{\cos kx, \text{ sen } kx\}_{k \in \mathbb{N}}\}$ define un sistema ortonormal en $L^2([-\pi, \pi])$ con el producto interior

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi} \pi f(x)g(x) dx.$$

16. Considerése la función

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}$$

Para cualquier $j, k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\Phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \Phi(2^j x - k).$$

a) Representar gráficamente algunas de las funciones $\Phi_{j,k}$ de forma que se ilustre el efecto que produce la elección de j y k.

b) Probar que el sistema $\{\Phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ define un sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

c) Probar la siguiente representación para la función característica $\chi_{[0,1)}(x)$ del intervalo $[0, 1)$.

$$\chi_{[0,1)}(x) = \sum_{j<0} 2^{\frac{j}{2}} \Phi_{j,0}(x).$$

17. Probar de dos maneras distintas que $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi x \operatorname{sen} nx\, dx = 0$.

18. Sea $\{\phi_i\}_{i=0}^{\infty}$ un sistema ortonormal de funciones continuas y uniformemente acotadas. Estudiar la posibilidad de que exista alguna función ortogonal a alguno de los siguientes sistemas

    a) $\phi_0 + \phi_1,\ \phi_0 + \phi_2, ...,\ \phi_0 + \phi_n, ...$

    b) $\phi_0 + 2\phi_1,\ \phi_1 + 2\phi_2, ...,\ \phi_n + 2\phi_{n+1}, ...$

2.1 Teoría básica de integración. Espacio L^2

1. Calcular $|G|$ para $G = (0,1] \setminus \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$.

2. ¿Es posible que existan subconjuntos medibles $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ tales que $E_1 \subset E_2$ de forma estricta y $|E_1| = |E_2|$? ¿Y si E_1 y E_2 fuesen abiertos?

3. Probar que si $A \subset \mathbb{R}$ es medible y $x \in A$ entonces $|A| = |x + A|$, donde como es usual $x + A = \{x + a : a \in A\}$.

4. Probar que todo punto de $\mathbb{R}$ tiene medida de Lebesgue cero. Siguiendo el esquema planteado, probar que toda recta tiene igualmente medida (área) cero en el plano y todo plano tiene medida (volumen) cero en el espacio.

5. Sea $g(x)$ la función definida en $[0,1]$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}\, irreducible \\ 1, & x = 0 \\ 0, & resto \end{cases}$$

   ¿Es esta función R-integrable?

6. Sea $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Probar que para toda familia finita I_1, I_2, ..., I_n de intervalos abiertos de $(0,1)$ que verifique

$$\mathbb{Q}^* \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n,$$

   entonces

$$l(I_1) + l(I_2) + \cdots + l(I_n) \geq 1.$$

   ¿Cuánto vale $m(\mathbb{Q}^*)$?

7. Probar que $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ es una función Lebesgue integrable y calcular el valor de la integral.

8. Demostrar que toda función R-integrable es L-intgerable y las integrales valen lo mismo.

9. Probar que una función es R-integrable si, y sólo si, es continua en casi todo punto.

10. Sabiendo que f es una función medible, ¿es $|f|$ medible?

11. *Teorema de Egoroff.* Sea A un conjunto medible con $m(A) < \infty$, $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en A que convergen puntualmente a una función f. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe un subconjunto medible E de A con $m(E) < \delta$ tal que $f_n \to f$ uniformemente en $A \setminus E$.

    Demostrar este resultado.

12. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles en A verificando que existe $M < \infty$ tal que

$$\int_A |f_n| < M \text{ para todo } n.$$

Si $f_n \to f$ puntualmente en A, ¿es cierto que

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f?$$

13. Probar haciendo uso de la teoría de convergencia de integrales que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dm(x)$ es integrable.

14. Probar que la función Gamma admite la siguiente representación para $\alpha > 0$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^\alpha}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)}.$$

AYUDA: Considerar la integral

$$\int_0^1 (1-t)^n t^{\alpha-1} dt = \frac{n!}{\alpha(\alpha+1)\cdot\cdot(\alpha+n)}.$$

15. Dadas $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, probar que $fg \in L^2(\mathbb{R})$.

16. Probar que si $f \in L^2([a,b])$ $(-\infty < a < b < \infty)$ entonces $f \in L^1([a,b])$.

17. Sea $\{f_n\} \subset L^2([a,b])$ $(-\infty < a < b < \infty)$ una sucesión de funciones que converge a f en $L^2([a,b])$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n\, dm = \int_{[a,b]} f\, dm.$$

18. Probar que si $f_n \to f$ en $L^2(A)$ entonces existe una subsucesión f_{n_k} que converge f en casi todo punto de A.

19. Probar que la clase $C_c(\mathbb{R})$ de las funciones continuas en $\mathbb{R}$ con soporte compacto es densa en $L^2(\mathbb{R})$.

20. Probar que si $f_n \to f$ en $L^2(A)$ y $g \in L^2(A)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n g\, dm = \int_A fg\, dm.$$

21. Probar que $L^2(A)^* = L^2(A)$, esto es, $L^2(A)$ coincide con su dual.