1. .- Determinar si cada una de las igualdades siguientes es cierta o falsa. En cada caso razonar la decisión:

$a)\ \sum_{n=0}^{100} n^4 = \sum_{n=1}^{100} n^4$ $\qquad b)\ \sum_{n=0}^{100} 2 = 200$

$c)\ \sum_{i=0}^{100} (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{100} i^2$ $\qquad d)\ \sum_{k=0}^{100} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{100} k\right)^3$

$e)\ \sum_{k=2}^{100} \left(\sqrt{k-1}+1\right) = \sum_{k=1}^{99} \left(\sqrt{k}+1\right)$ $\qquad f)\ \sum_{k=0}^{100} \left(2\sqrt{k}+1\right) = \sum_{k=0}^{100} \left[\left(\sqrt{k}+1\right)^2 - k\right]$

2. .- Resolver las inecuaciones siguientes:

$a)\ \dfrac{2x-3}{x+3} > 3x.$ $\qquad b)\ (x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2}) > 0.$

$c)\ \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x}{x-2} \leq 2.$ $\qquad d)\ x + 3^x < 4$

$e)\ 1 - \dfrac{x}{2} > \dfrac{1}{1+x}$ $\qquad f)\ x < x^2 - 12 < 4x$

3. .- Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

$a)\ \ 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

$b)\ \ 1^3 + 2^3 + \ldots n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$

$c)\ \ 3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 1\dot{7}$ (múltiplo de 17).

$d)\ \ 6\left(1 + 7 + 7^2 + \ldots 7^n\right) + 1 = 7^{n+1}.$

$e)\ \ 2^n > n.$

$f)\ \ 3^{4n} + 9 = 1\dot{0}$

$g)\ \ 9^{n+1} - 8n + 55 = 6\dot{4}$

$h)\ \ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

i) Encontrar una fórmula para : $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2$.

$j)$ $\dfrac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$

4. .- Se definen de forma recurrente:

   - Las permutaciones de n elementos. P_n, por: $P_0 = 0! = 1$,

   $$P_n = n! = n(n-1)! = nP_{n-1}.$$

   - Las combinaciones de m elementos tomados de m en n, $\binom{m}{n}$, por:

   $$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1, \quad \binom{m}{s} = \binom{m-1}{s-1} + \binom{m-1}{s}, \quad \forall m \in I\!N.$$

   Demostrar por el método de inducción completa que:

   $$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r}.y^r \quad \textit{(Binomio de Newton).}$$

5. .- Demostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, tales que $0 < x < y$ se cumple:

   $$x < \frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2} < y$$

6. .- Demostrar que si x_1 , x_2 , $\cdots$, x_n son números reales mayores que -1 y todos del mismo signo, entonces:

   $$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \;\geq\; 1 + x_1 + \cdots + x_n$$

7. .- Hallar todos los valores reales de r para los cuales el polinómio

   $$\left(r^2-1\right)x^2 + 2(r-1)x + 1$$

   es positivo para todos los valores reales de x.

8. .- Encontrar los números reales x para los que se cumplen:

   $a)$ $|x+2| + |x-2| \leq 12$. $b)$ $\big|\, |x+1| - |x-1| \,\big| < 1$.

   $c)$ $\left|x - \dfrac{1}{x}\right| > 1$. $d)$ $|5 - x^{-1}| < 1$.

   $e)$ $\left|x^2 - 7x + 12\right| > x^2 - 7x + 12$.

9. .- Demostrar las disigualdades:

$$|x-y| \geq |\,|x|-|y|\,|\,.$$
$$|x+x_1+\ldots+x_n| \geq |x|-(|x_1|+\ldots+|x_n|)\,.$$

10. .- Comprobar que el conjunto de las fracciones racionales propia $\frac{m}{n}$ $m,n \in I\!N$ y $0<m<n$, no tiene elemento mínimo ni máximo. Hallar el ínfimo y el supremo.

11. .- Demostrar la indentidad

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$

12. .- (a) Supóngese que $b^2-4c \geq 0$. Demostrar que los números

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}, \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

satisfacen ambos la ecuación $x^2+bx+c=0$.

(b) Supóngase que $b^2-4c<0$. Demostrar que no existen ningún número x que satisfaga $x^2+bx+c=0$; de hecho es $x^2+bx+c>0$ para todo x.

(c) Utilizar este hecho para dar otra demostración de que si x e y no son ambos 0, entonces $x^2+yx+y^2>0$.

(d) ¿ Para qué valores α se cumple que $x^2+\alpha yx+y^2>0$ siempre que x e y no sean ambos 0?

(e) Hállese el valor mínimo posible de x^2+bx+c y de ax^2+bx+c, para $a \neq 0$.

13. .- Demostrar que

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ es irracional.

(b) $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ es irracional.

14. .- Encontrar los extremos superior e inferior de los siguientes subconjuntos de la recta real.

$$S_1=\{x \in I\!R \,:\, x=2^{-p}+3^{-q}+5^{-r}, p,q,r \in I\!N\}$$
$$S_2=\{x \in I\!R \,:\, 3x^2-10x+3<0\}$$
$$S_3=\{x \in I\!R \,:\, (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)<0 \quad a<b<c<d\}$$

15. .- Sea A y B dos conjuntos de números reales acotados superiormente, y sea $\alpha = \sup A$ y $\beta = \sup B$. Si $C = \{z \in \mathbb{R} : z = xy \;\; x \in A, \;\; y \in B\}$ demostrar que, en general, es falsa la igualdad

$$\alpha\beta = \sup C.$$

16. .- Sean A y B conjuntos acotados de números reales. Se dice que $A \leq B$ cuando, para cada elemento $x \in A$, $\exists y \in B \;\; x \leq y$. Analizar las siguientes implicaciones

    (a) Si $A \leq B$ entonces $\sup A \leq \sup B$.

    (b) Si $A \leq B$ entonces $\inf A \leq \inf B$.

    (c) Si $A \leq B$ y $B \leq A$ entonces $A = B$.

17. .- Un móvil recorre un cuadro de vértices A, B, C, D con velocidad constante, y otro móvil se desplaza con la misma velocidad sobre la diagonal AC, realizando movimientos de ida y vuelta sobre esta última. Si, en un instante dado, ambos móviles coinciden en el punto A, demostrar que no vuelven a encontrarse.

18. .- Estudiar para que valores $n \in \mathbb{N}$ es cierta la desigualdad siguiente:

$$n\, y^{n-1}\,(x-y) \;<\; x^n \;-\; y^n \;<\; n\, x^{n-1}\,(x-y) \quad si\; 0 < y < x.$$