1. Representar:

$$a)4x^2+y^2=16 \quad b)z^2=y^2+4 \quad c)\frac{x}{4}=\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}$$

$$d)z=x^2 \quad e)z=\tfrac{y^2}{4}-\tfrac{x^2}{9} \quad f)4x^2-3y^2+2z^2=0$$

$$g)x+2z=4 \quad h)x^2+y^2-2x=0 \quad i)\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1+\frac{x^2}{16}$$

$$j)y^2+z^2=4 \quad k)y^2=x^2+z^2 \quad l)\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{9}=1$$

2. Demostrar que, para la función $f(x,y)=(x+y)sen(x^{-1})sen(y^{-1})$, ambos límites, $\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\}$ y $\lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\}$ no existen, a pesar de que existe $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

3. Encontrar el límite, si existe, $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

4. Demostrar que para la función

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

se tiene $\lim_{x\to 0}\{\lim_{y\to 0} f(x,y)\} = \lim_{y\to 0}\{\lim_{x\to 0} f(x,y)\} = 0$, a pesar de que no existe $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

5. Sobre qué direcciones ϕ existe el límite finito:

$$a)\lim_{\rho\to+0}\exp\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \qquad b)\lim_{\rho\to+\infty}\exp(x^2-y^2)\ \mathrm{sen}(2xy),$$

si $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\ \mathrm{sen}\ \phi$.

6. Calcular, si existen los siguientes límites.

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

7. Comprobar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{si } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

es continua en el punto $(0,0)$ a lo largo de cada rayo

$$x=t\cos\alpha, y=t \text{ sen } \alpha(0\leq t<+\infty),$$

que pase por este punto, es decir, existe

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\alpha, t \text{ sen } \alpha)=f(0,0);$$

sin embargo, esta función no es continua en el punto (0,0).

8. Sea f definida por

$$f(x,y)=\frac{1-\cos(\sqrt{xy})}{y}, \qquad y\neq 0.$$

¿Es posible definirla cuando $y=0$, de modo que sea continua?

9. Pruébese que $f(x,y)=|xy|^{\frac{1}{2}}$ es contínua en el $(0,0)$.

10. Estúdiese la continuidad de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

$$a) f(x,y)=\begin{cases}x & \text{si } |x|\leq|y|\\ y & \text{si } |x|>|y|\end{cases}$$

$$b) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$c) f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}} & \text{si}(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

11. ¿Existe el $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy-x+y}{x+y}$?.

12. Sea n entero no negativo y

$$f_n(x,y) = \frac{x^n}{x^2+y^2} \; para \; (x,y) \neq (0,0) \;\; y \;\; f(0,0) = 0.$$

Discútase la continuidad de f_n según los valores de n.

13. Dada la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^a y^b}{x^4+x^2y^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

siendo a y b números reales positivos, hallar la condición para que $f(x,y)$ sea contínua en el punto $(0,0)$.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Demostrar que existe la derivada en cualquier dirección v en el punto $(0,0)$ y calcularla en función del vector v de dirección.

2. (a) Determínense los valores de las constante a, b, c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga un valor máximo de 64 en la dirección paralela al eje Z.

(b) Con los valores obtenidos en (a), determínese el plano tangente a la superficie $f(x,y,z) = 0$ en el punto $(0,0,1)$.

3. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

¿Es diferenciable en $(0,0)$?.

4. Estúdiese la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en $(0,0)$ de las siguientes funciones.

$$(a)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x,y)=\begin{cases}x\ sen\dfrac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(d)\ \ f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$(e)\ \ f(x,y)=e^{x+y}$$

5. Sea $n\in\mathbb{N}$. Considérese la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Determinar los valores de n para que:

(a) f sea contínua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(b) f sea diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

(c) f tenga derivadas parciales contínuas en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

6. Haciendo uso de la definición de diferencial de una función encontrar valores aproximados de:

(a) $ln\left(\sqrt[3]{1.07}+\sqrt[4]{0.98}-1\right)$

(b) $1.04^{2.02}$

7. (a) Hallar el vector normal a la superficie $z = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}$ en el punto genérico $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

   (b) Hallar el coseno del ángulo θ formado por el vector anterior y el eje Z.

8. Sea $a = (2,4)$, $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (-1,2)$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en a, siendo $f(a) = 2$, $D_{\mathbf{u}}f(a) = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$, $D_{\mathbf{v}}f(a) = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

   (a) Calcular $\nabla f(a)$.

   (b) Probar que $g(t) = f\left(t, t^2\right)$ es derivable en $t = 2$ y calcular $g'(2)$.

   (c) Calcular la derivada de $g \circ f$ respecto del vector $(2,1)$ en a.

9. El capitan de una nave tiene dificultades cerca del lado soleado de Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando el está en la posición (x,y,z) es $T(x,y,z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde x, y, z están medidas en metros. Actualmente su posición es $(1,1,1)$.

   (a) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?.

   (b) Si la nave viaja a $e^8 m/s$, ¿Con qué rapidez decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?.

   (c) Desafortunadamente, el metal del casco se cuarteará si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}\,e^2$ grados por segundo. describir el conjunto de direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor que ésa.

10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 arctg\,(\frac{y}{x}) - y^2 arctg\left(\frac{x}{y}\right), & xy \neq 0 \\ \\ 0, & xy = 0\,. \end{cases}$$

Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

11. En $\mathbb{R}^3$, consideremos $\mathbf{R}(x,y,z) = xi + yj + zk$ y $r(x,y,z) = \|R(x,y,z)\|$.
    (a) Demostrar que $\nabla r(x,y,z)$ es un vector unidad en la dirección de $\mathbf{R}(x,y,z)$.
    (b) Demostrar que $\nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{R}$, si n es un entero positivo.
    (c) Hallar un campo escalar f tal que $\nabla f = \mathbf{R}$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y\, cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$$

    (a) Estúdiese la diferenciabilidad de f en $(0,a)$.
    (b) Estúdiese si se cumple la igualdad $D_{1\,2}f(x,y) = D_{2\,1}f(x,y)$.

13. Determinar la tangente a la curva

$$x = t^2 f''(t) - 2tf'(t) + 2f(t), \quad y = f''(t), \quad z = tf''(t) - f'(t)$$

en $t = t_0 \neq 0$, en la que f es una función de clase C^3 en $\mathbb{R}$. Suponiendo que $f^{(3)}(t_0) \neq 0$, probar que la paralela a la recta tangente anterior que pasa por el origen está contenida en la superficie $z^2 = xy$.

14. Dibujar la curva $x = a\,cost$, $y = a\,cos2t$, $z = a\,sent$, $a > 0$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

15. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\mathbf{r} = (4\,cos3t\ ,\ 5\,sen3t)$, donde t denota el tiempo. encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = \frac{\pi}{12}$. Encontrar la posición de la partícula cuando $\|v\|$ es mínimo.

16. Una partícula que se mueve sobre la curva $\sigma(t) = 3t^2\,\mathbf{i} - sent\,\mathbf{j} - e^t\,\mathbf{k}$ se suelta en el tiempo $t = \frac{1}{2}$ y sale por la tangente manteniendo su velocidad constante. ¿Cuáles son sus coordenadas en el tiempo $t = 1$?.

17. Sea $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ el camino $f(t) = (t^3 - 3t, t^2 + t)$. Determinar una función $\varphi : [-2,2] \longrightarrow [-1,1]$ sobreyectiva de clase C^1 tal que $f \circ \varphi : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sea un camino que empiece en el punto $f(-1) = (2,-3)$ vaya al punto $f(1) = (-2,5)$ durante los dos primeros segundos y regrese finalmente al punto $f(-1)$ durante los siguientes dos segundos. ¿Es $g = f \circ \varphi$ una reparametrización de f?.

18. Hallar la ecuación de la curva que describe un punto fijo de una circunferencia de radio a, que rueda sin deslizarse, a una velocidad constante sobre el eje X.

19. La fuerza que actúa sobre una partícula P de masa m está dada por $F = \mathbf{i}\ cos\, t\ + \mathbf{j}\ sen\, t$. Si la partícula parte del punto $(c,0)$ con velocidad inicial $v_0\mathbf{j}$ perpendicular al eje X, hállese la trayectoria que describe.

20. Desarrollar la función $f(x,y) = x^y$ en un entorno del punto $(1,1)$ hasta los términos de tercer grado. Aplicar el resultado para calcular aproximadamente $1.1^{1.02}$.

21. Escribir la fórmula de Taylor, con término complementario de grado k, en el punto $(1,1)$, de la función $g(x,y) = log(x+y)$, $(x>0,\ y>0)$.

22. Sea $f(x,y) = \frac{1}{x} cos\, y$, $x>0$, $x_0 = (1,0)$. Desarrollar $f(x,y)$ por la fórmula de Taylor en torno a x_0, con resto de orden 2 y encontrar una estimación de $|R_2(x,y)|$.

23. Calcular los puntos críticos, extremos relativos y puntos de ensilladura de las siguientes funciones:
    (a) $f(x,y) = x^3 + x - 4xy - 2y^2$.
    (b) $f(x,y) = x(y+1) - x^2 y$.
    (c) $f(x,y) = cos\, x\ cosh\, y$.

24. Estudiar según los valores del parámetro real α, la existencia y naturaleza de los extremos de la función real $f(x,y) = \left(\alpha^2+1\right)\left(x^2+y^2\right) + 4\alpha xy$.

25. Determinar los puntos donde la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y + x$ alcanza sus máximos y sus mínimos absolutos en el conjunto: $\mathbf{K} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le 0,\ y \le 0,\ x+y \ge -3\right\}$.

26. Determinar el máximo y mínimo absoluto de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2+y^2\right)$ definida en un círculo, incluida su circunferencia, que tiene por centro el origen y radio 3.