1. - Hallar el dominio de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+5x+4} \quad b)\ f(x)=\sqrt[3]{sen\ x}$$

$$c)\ f(x)=L\frac{x^2+1}{x^2+3x-4} \quad d)\ f(x)=\sqrt{log_7\,(x^2-5x-4)}$$

$$e)\ f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \quad f)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}}$$

$$g)\ f(x)=L(Lx) \quad h)\ f(x)=arcos\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

2. - Calcular $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, si $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$.

3. - Hallar los valores de x para los cuales: a) $f(x)=0$; b) $f(x)>0$; c) $f(x)<0$, si: (i) $f(x)=x-x^3$; (ii) $f(x)=sen\frac{\pi}{x}$; (iii) $f(x)=(x+|x|)\,(1-x)$.

4. - Sea $f(u)$ una función definida para $0<u<1$. Hallar los campos de definición de las funciones:

   a) $f(senx)$; $f(Lx)$; c)$f\left(\frac{|x|}{x}\right)$.

5. - Sean $f,g,h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, $h(x)=senx$. Calcular

$$a)\ f\circ g \quad b)\ f\circ h \quad c)\ (f\circ g\circ h)+(h\circ g)$$

6. - Encontrar cuatro números reales a,b,c,d tales que:

$$f(f(x))=x,\ \text{siendo}\ f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$

7. - Sea $f_n(x)=f(f(\cdots f(x)))$ (n veces). Hallar $f_n(x)$, si $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

8. - Hallar $f(x)$ si $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

9. - Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+2}-x$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3}$

$c)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1-cosx}{arcsen3x^2}$ $\qquad d)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (secx - tagx)$

$e)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{L(1+senx)}{tagx}$ $\qquad f)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(1-cos\frac{1}{x})}{(x+3)L(1+\frac{1}{x^2})}$

$g)\ \lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2-4x+2}\right)^{\frac{x^2+5}{x+2}}$ $\qquad h)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{Lx}{x^2-1}$

10. - Hallar a y b para que: $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1} - ax - b\right) = 0.$

11. - Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m\ y\ n\ son\ numeros\ naturales)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

$c)\ \lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$

12. - Sea $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y sea $m \in \mathbb{Z}$. Demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)}\ -\ 1}{x} = \frac{a_1}{m}\ .$$

13. - Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty} \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N})$

$b)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n - \left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ $(n\in\mathbb{N})$

14. - Calcular los siguientes límites mediante sustitución de infenitésimos equivalentes:

$$a)\ \lim_{x\to a}\frac{sen^2x-sen^2a}{x^2-a^2} \qquad b)\ \lim_{x\to a}\frac{arctag(\frac{x-a}{2})}{Ltag(\frac{\pi x}{4a})}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\sqrt{x^2+5}}-1}{x} \qquad d)\ \lim_{x\to\infty}\left(tag\frac{x\pi}{2x+1}\right)^{1/x}$$

15. - Calcular los siguientes límites

$$a)\ \lim_{x\to\pi/2}(sen^2x)^{tag^2x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left[\frac{a_1b_1^x+a_2b_2^x+\ldots+a_pb_p^x}{a_1+a_2+\ldots+a_p}\right]^{1/x}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left[tag(x+\frac{\pi}{4})\right]^{1/senx} \qquad d)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(1-senx)^{tag^2x}$$

16. - Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to\infty}\left[sen\left(L(x+1)\right)-sen(Lx)\right].$ $\qquad b)\ \lim_{x\to\infty}\left(sen\frac{1}{x}+cos\frac{1}{x}\right)^x$

$c)\ \lim_{x\to+\infty}x\left[L(x+1)-Lx\right].$ $\qquad d)\ \lim_{x\to 0}\frac{L\,tg\,(\frac{\pi}{4}+ax)}{sen\,bx}.$

17. - Averiguar si las funciones siguientes son continuas en el conjunto de puntos que se indica:

a) $y=xsen\frac{1}{x}$, $\quad\forall x\in I\!R-\{0\}$ e $y(0)=0$, en $I\!R$.

b) $y=\frac{3^{1/x}+1}{3^{1/x}-1}$, $\quad\forall x\in I\!R-\{0\}$ e $y(0)=0$, en $I\!R$.

c) $y=\frac{e^{tagx}+1}{e^{tagx}-1}$ y en los puntos donde esta expresión no tenga sentido la función vale 1, en $\pi/2$.

18. - Estudiar la continuidad de la función

$$y=\begin{cases} xsen\frac{\pi}{x}sen\frac{1}{sen\frac{\pi}{x}}, & x\neq 0,\quad x\neq\frac{1}{n} \\ 0 & x=0,\quad x=\frac{1}{n}\end{cases}$$

19. - Estudiar la continuidad de:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} e^{\frac{x-2}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

20. - Demostrar que la ecuación $senx - x + 1 = 0$ tiene alguna raiz.

21. - Demostrar que la ecuación $x^4 + 2x^3 = 1$ tiene al menos dos raices reales.

22. - Sea f una función polinómica cualquiera. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$.

23. - Discutir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrándolas o dando un contraejemplo.

    (a) f, g continuas en $a \Rightarrow f + g, \quad f - g, \quad f.g$ continuas en a.

    (b) f, g continuas en a y $g(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$continua en a.

    (c) f, g discontinuas en $a \Rightarrow f + g$ discontinua en a

    (d) f continua en a y g discontinua en $a \Rightarrow f + g$ discontinua en a.

    (e) f discontinua en $a \Rightarrow f^2 = f.f$ discontinua en a.

    (f) Existe una función que es discontinua en todos los puntos excepto en uno.

24. - Se considera las funciones f y g definidas para $x \neq 0$ por

$$\text{a)}\ f(x) = \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right] \qquad \text{b)}\ g(x) = \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]$$

    donde $a > 0$, $b > 0$ y $[x]$ la parte entera de x. ¿ Existen los límites laterales de f y g en $x = 0$?

25. - Si $f(x) = \dfrac{(cotgx - E(cotgx))arcsenx^2}{L(1+L(1+tagx))}$ y f es continua en 0, calcular $f(0)$. Donde $E(cotgx)$ representa la parte entera de $cotgx$.

26. - Supóngase que f es una función real definida sobre $\mathbb{R}$ que además satisface la condición
$$\lim_{h\to 0}[f(x+h) - f(x-h)] = 0$$
para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Lo anterior implica que f es continua?

27. - Estudiar la continuidad de :
$$f(x) = x - [x] \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$$

28. - Dada la función $f(x) = \sqrt{xE(x)} - E(x)$, estudiar la derivabilidad de f en $x = 1$.

29. - Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo número real x, y demostrar que $f^{3)}(0)$ no existe.

30. - Demostrar que la función $f(x) = \sqrt{x^2(1+x)}$ no es derivable en el origen.

31. - Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones

    (a) $f(x) = \max(x^2, \dfrac{1}{x})$, $\forall x \in I\!R$ en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

    (b) $y = 3|x| + 1$, en $x = 0$.

    (c) $y = |ln(x)|$, en $x = 1$.

32. - Derivar
$$y = arctg\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}}$$

33. - Hallar $\dfrac{dx}{dy}$ en

$$x = a.arcsen\frac{1}{a}\sqrt{2ay - y^2} - \sqrt{2ay - y^2}$$

34. - Derivar

$$y_1 = arctg\frac{\sqrt{a^2 - b^2}senx}{b + acosx} \qquad y_2 = arccos\frac{b + acosx}{a + bcosx}$$

Interpretar los resultados.

35. - Dada la función $y = \dfrac{1}{a^2 - b^2x^2}$ hallar su derivada enésima.

36. - Calcular las derivadas de orden n de las siguientes funciones

(a) $y = ln(x - a)$

(b) $y = (px + q)^n$

(c) $y = \dfrac{x}{a + bx}$

37. - Hallar la derivada enésima de $y = \dfrac{1}{x^3 + x^2}$

38. - Hallar las derivadas de orden r de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} a)\ y = ln(x) & b)\ y = e^{kx} \\ c)\ y = sen5x\, cos2x & d)\ y = ln(x^2 + x - 2). \end{array}$$

39. - Calcular la derivada de orden 25 de la función $y = x^2 senx$.

40. - Sobre la curva $y = x^3$ hallar el punto en el que la tangente es paralele a la cuerda que une los puntos $A(-1, 1)$ y $B(2, 8)$.

41. - Sea f una función con derivada tercera en un intervalo compacto $[a, b]$ y tal que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$. Demostrar que existe $c \in (a, b)$ verificando $f'''(c) = 0$.

42. - La altura de un cono de revolución es 100m, y decrece a razón de 10m/seg. El radio de la base es de 50m y crece a razón de 5m/seg. Estudiar la variación del volumen en cada instante.

43. - Calcular la derivada para $x = 1$ de la función

$$y = \frac{x-1}{1+x^{\frac{1}{x-1}}}$$

44. - Estudiar la continuidad y derivabilidad en el origen de la función $f(x)$ definida

$$f(x) = \begin{cases} |x cos\frac{1}{x}| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

45. - Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función $y = max(senx, cosx) \quad x \in \mathbb{R}$.

46. - Calcular $\lim_{x\to\ 0} \frac{6x\ cosec\ x\ -\ x^2\ -\ 6}{x^4}$.

47. - Comprobar : $\lim_{x\to 0} \frac{x\ -\ sen\ x}{x^3}\ =\ \frac{1}{6}$

48. - Calcular aplicando la regla de L'Hopital los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{cos\ x} - tg\ x\right], \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x\ -\ e^{-x}\ -\ 2x}{1\ -\ cos\ x}, \quad \lim_{x\to k} \left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{tg\frac{\pi}{2}\frac{x}{k}}$$

49. - Hallar $f'(0)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

y $g(0) = g'(0) = 0$ y $g''(0) = 17$.

50. - Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} (arctg\ x)^{\frac{1}{ln\ x}} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x - senx}{x + senx}$$

$$\lim_{x\to\infty} (ln\ x)^{\frac{1}{1\ -\ ln\ x}} \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{4\ arctg\ x}{\pi}\right)^{tg\frac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} (cos\ x)^{cotg^2 x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (3\ +\ 2\ e^{tg\ x})^{\pi\ -\ 2x}$$

51. - Representar gráficamente: $y = \sqrt{\dfrac{9\,x^3}{x-1}}$

52. - Estudiar y representar gráficamente las funciones:

$$f(x) = cos2x \;+\; 2senx \qquad f(x) = x\sqrt{3-2x}$$

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad\qquad f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$$

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad f(x) = x^{-1}\log x$$

53. - Representar gráficamente la función: $f(x) = \dfrac{a}{x}\; ln\; \dfrac{x}{a}$, siendo $a > 0$.

54. - ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

55. - Inscribir en una esfera dada un cono de volumen máximo.

56. - Se considera la familia de elipses $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, que pasan por el punto $(1,1)$. Se pide la elipse de la familia que determina una región de área mínima.

57. - Dados los puntos $A = (-2,4)$ y $B = (4,2)$, encontrar sobre el eje OX un punto C de manera que el recorrido AC+CB sea mínimo.

58. - El perímetro de un triángulo isósceles es 2p. ¿Cuánto deben medir sus lados para que el volumen del cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura sea máximo?.

59. - Se considera la parábola $y = -x^2 + 12$ y el triángulo formado en el primer cuadrante por los semiejes positivos y una tangente a dicha curva. Determinar el punto de tangencia de forma que el área de dicho triángulo sea mínima.

60. - Determinar la tangente a la curva $y = ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + arc\,tgx$, en el punto de abscisa $x = 0$.

61. Sea f una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con derivada primera continua en todo punto. Demostrar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

62. El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demostrar que si se rompe en dos partes, se produce una pérdida de su valor y que esta pérdida es máxima cuando las dos partes son iguales.