# Tema 0: ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN 1
## Ecuaciones diferenciales de $1^{er}$ orden. Aplicaciones

1. Si la población de un pais se duplica en 50 años, ¿En cuantos será el triple, suponiendo que la velocidad de aumento sea proporcional al número de habitantes?

2. En un cultivo de bacterias la velocidad de aumento es proporcional al número presente: a) si se ha hallado que el número se duplica en 4 horas. ¿Qué número se debe esperar al cabo de 12 horas? b) Si hay $10^4$ al cabo de 3 horas y $4.10^4$ al cabo de 5 horas, ¿cuántas había en un principio?

3. Según la ley de Newton del enfriamiento, la velocidad a que se enfría una sustancia al aire libre es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del aire. Si la temperatura del aire es de 30°C y la sustancia se enfría de 100°C a 70°C en 15 minutos, ¿cuándo será 40°C la temperatura de la sustancia?

4. Cierto producto químico se disuelve en el agua a una velocidad proporcional al producto de la cantidad aún no disuelta y la diferencia entre la concentración en una solución saturada y la concentración en la solución real. Se sabe que en 100 gramos de una solución saturada están disueltos 50 g. de sustancia. Si se agitan 30 g. del producto químico con 100g. de agua, en dos horas se disuelven 10g. ¿cuántos se disolverán en 5 horas?

5. Un tanque de 100Dl. está lleno con salmuera que contiene 60kg. de sal disuelta. Entra agua en el tanque a una velocidad de 2Dl/min. y la mezcla, conservada uniforme mediante agitación, sale a la misma velocidad. ¿Cuánta sal queda en el tanque después de una hora?

6. Se ha comprobado que hay una concentración de 0,2% de $CO_2$ en una galería subterránea de 150x50x12 $dm^3$, por lo que se trata de renovar esa atmósfera con aire del exterior, cuya concentración de $CO_2$ es de 0,05%, mediante ventiladores a una velocidad de 9000 $dm^3$/min. Hállese el porcentaje de $CO_2$ después de 20 minutos.

7. Bajo ciertas condiciones la cantidad constante $Q$ calorias/segundos de calor que pasa a través de una pared está dada por $Q = -kA\frac{dT}{dx}$, donde $k$ es la conductividad del material, $A(cm^2)$ es la superficie de una cara de la pared perpendicular a la dirección del flujo y $T$ es la temperatura a $x(cm)$ de esa cara, de forma que $T$ disminuye cuando $x$ aumenta. Hallar el número de calorías por hora del calor que pasa a través de 1 $m^2$ de la pared de una habitación frigorífica de 125 cm de espesor y $k = 0,0025$, si la temperatura de la cara interior es de $-5^0C$ y la de la cara exterior es de $75^0$.

8. Un conducto de vapor de 20 cm de diámetro está protegido por un recubrimiento de 6 cm de espesor para k=0,0003.

   (a) Hallar la pérdida de calor por hora a través de una longitud de un metro de la tubería si su superficie está a 200°C y la superficie exterior del recubrimiento está a 30°C.

   (b) Hallar la temperatura a una distancia $x = 5$ cm del centro de la tubería.

9. Hallar el tiempo que se necesita para vaciar un tanque cilíndrico de radio 8 dm y altura 10 dm a través de un orificio redondo de radio 1/12 dm situado en el fondo del tanque, sabiendo que por un orificio de ese tipo sale el agua a una velocidad aproximada de $v = 4'8\sqrt{h}$, donde $h$ es la altura del agua en el tanque.

10. Un barco que pesa 48.000 toneladas parte del reposo bajo el impulso de una fuerza propulsora constante de 200.000 lb.

    (a) Hallar su velocidad como una función del tiempo t, sabiendo que la resistencia en libras es 10.000v, estando v=velocidad media en pies/segundo.

    (b) Hallar la velocidad terminal en millas por hora. (tómese $g = 32 pies/seg^2$.)

11. Una masa es arrastrada por el hielo sobre un trineo; incluido el trineo, el peso total es de 80lb. Suponiendo que es despreciable la resistencia del hielo a los corredores y que el aire opone una resistencia en libras igual a 5 veces la velocidad (v pies/seg.) del trineo, hállese

    (a) la fuerza constante ejercida sobre el trineo para obtener un velocidad terminal de 10 millas por hora.

    (b) la velocidad y la distancia recorrida al cabo de 48 segundos.

12. Un paracaidista está cayendo con una velocidad de 176 pies/seg=53.65 m/seg cuando se abre su paracaidas. Si la resistencia del aire es $Wv^2/256$lb., donde $W$ es el peso total del hombre y del paracaidas, hallar su velocidad como función del tiempo t, después de abierto el paracaidas.

13. Una de las ecuaciones fundamentales en circuitos eléctricos es

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$$

    donde L(henrios) se denomina la inductancia, R(ohmios) la resistencia, i(amperios) la corriente y E(voltios) la fuerza electromotriz o f.e.m. (en este problema se consideran constantes R y L).

    (a) Resolver la ecuación cuando $E(t) = E_0$ y la corriente inicial es $i_0$.

    (b) Resolver la ecuación cuando $L = 3$ henrios, $R = 15$ ohmios, $E(t)$ es onda sinusoidal de amplitud 110 voltios, ciclo 60 e $i = 0$ para $t = 0$.

14. Si un circuito eléctrico contiene una resistencia R(ohmios) y un condensador de capacidad C(faradios) en serie y una f.e.m. E(voltios), la carga del condensador q(culombios) está dada por:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

    Si R=10 ohmios, C=$10^{-3}$ faradios y E(t)=100sen $120\pi t$ voltios,

    (a) hallar q, suponiendo que q=0 para t=0.

    (b) Emplear $i = \dfrac{dq}{dt}$ para hallar i, suponiendo i=5 amperios cuando t=0.

15. un cuerpo de masa m cae desde el reposo en un medio para el que la resistencia es proporcional a la velocidad. Si la gravedad específica del medio es 1/4 la del cuerpo y si la velocidad límite o terminal es de 7.31 m/seg= 24 pies/seg hallar

    (a) la velocidad al cabo de 3 segundos.

    (b) la distancia recorrida en 3 segundos.

16. Se disuelven inicialmente 50 lb de sal en un recipiente grande que contiene 300 galones de agua. Se bombea salmuera al recipiente a razón de $a$ galones por minuto (gal/min) siendo la concentración de la solución que entra de 2 libras por galón la solución debidamente mezclada se bombea hacia afuera del recipiente a razón de "b" gal/min.

    La ecuación diferencial para la cantidad A de sal (en libras) dentro del recipiente en cualquier instante es

    $$\frac{dA}{dt} = (a)(2) - 2\frac{A}{300 + (a-b)t}$$

    Determinar la cantidad de sal que hay en el recipiente en un instante cualquiera.

17. Un gran tanque está parcialmente lleno con 100 galones de fluído en los cuales se disuelven 10 lb de sal. Una salmuera que contiene $1/2lb$ de sal por galón se bombea dentro del tanque con una rapidez de 6 galones por minuto. La solución adecuadamente mezclada se bombea en seguida hacia afuera del tanque con una rapidez de 4 galones por minuto. Encuentre el número de libras de sal que hay en el tanque después de 30 minutos.

18. En un modelo de la evolución de la población $P(t)$ de una comunidad se supone que $\frac{dP}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dD}{dt}$ donde $\frac{dB}{dt}$ es la rapidez con que la gente nace y $\frac{dD}{dt}$ la rapidez con que muere:
    a) Encuentrese $P(t)$ si $\frac{dB}{dt} = k_1 P$ y $\frac{dD}{dt} = k_2 P$.
    b) Analize los casos $K_1 > K_2$, $K_1 = K_2$ y $K_1 < K_2$.

19. Inicialmente había 100 miligramos presentes de una sustancia radioactiva. Después de 6 horas la masa disminuyó en 3%. Si la rapidez de desintegración es en un instante cualquiera proporcional a la cantidad de sustancia presente en dicho instante, encuentre la cantidad que queda después de 24 horas.

20. En un trozo de madera quemada o de carbón, se encontró que el 85.5% de C-14 se había desintegrado. ¿Qué edad tenía aproximadamete la madera? (Es precisamente este dato el que los arqueólogos usaron para determinar la edad de las pinturas prehistóricas encontradas en una caverna de Lascaux, Francia). (vida media del C-14 es 5600 años)

21. Un termómetro se saca de una habitación, donde al temperatura del aire es de $70^o$ F, al exterior, donde la temperatura es de $10^o$ F. Después de 1/2 minuto al temperatura es de $50^o$ F. ¿Cuánto marca el termómetro despues de 1 minuto? ¿Cuánto tiempo demorará el termómetro en alcanzar los $15^o$ F?.

22. Cuando un objeto absorbe calor del medio que lo rodea sigue la Ley de Newton. Una pequeña barra de metal, cuya temperatura inicial es de $20^o$ C se deja caer en un recipiente con agua hirviendo. Calcule el tiempo que dicha barra demorará en alcanzar los $90^o$ C si se sabe que su temperatura aumentó $2^o$ en un segundo.¿Cuánto tardará la barra en alcanzar los $98^o$ C?.

23. La rapidez con que una droga se disemina en el flujo sanguíneo se rige por la ecuación diferencial $\frac{dX}{dt} = A - BX$ donde $A$ y $B$ son constantes positivas. La función $X(t)$ describe la concentración de la droga en el flujo sanguíneo en un instante $t$ cualquiera. Encuentre el valor límite de $X$ cuando $t \to \infty$ . ¿Cuánto demora la concentración en alcanzar la mitad de este valor límite?. Suponga que $X(0) = 0$.

24. Dos sustancias químicas $A$ y $B$ se combinan para formar una sustancia química $C$. La rapidez o velocidad de la reacción es proporcional la producto de las cantidades instantáneas de $A$ y $B$ que no se han convertido en la sustancia química $C$. Inicialmente hay 40 gramos de $A$ y 50 gramos de $B$ y por cada gramo de $B$ se usan dos gramos de $A$. Se observa que se forman 10

gramos de $C$ en 5 minutos. ¿Cuánto se formará en 20 minutos? ¿Cuál es la cantidad límite de $C$ después de un tiempo largo?. ¿Cuánto queda de las sustancias químicas $A$ y $B$ después de un tiempo largo?.

25. Resuelva el problema precedente si inicialmente hay 100 gramos presentes de la sustancia química A. ¿Cuánto tardará en formarse la mitad de la sustancia $C$?.

26. De acuerdo con una teoría cosmológica, había igual cantidad de los dos isótopos $U^{225}$ y $U^{238}$en el momento del " Big Bang ". En el momento actual hay 47 átomos de $U^{238}$ por cada átomo de $U^{225}$. Considerando la vida media del $U^{238}$, $4.5x10^9$ años y del $U^{225}$, $0.71x10^9$, dar una estimación de la edad del Universo.(El resultado del problema es bastante inferior a la edad del Universo estimada actualmente pero muy próxima a la edad del planeta Tierra por lo que implicaría que donde había igual cantidad de estas sustancias fue en el momento de formación de nuestro planeta).

27. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Supóngase que un accidente nuclear ha provocado que el nivel de este cobalto ascienda en una región hasta 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que la región vuelva a ser habitable?

28. En una reacción química se combinan dos sustancias A y B para formar una tercera C. De partida se cuenta con 30 Kg de A y 45 Kg de B y se sabe que por cada kilo de A se gastan 3 kilos de B. Determinar la cantidad de sustancia formada en cada instante si se sabe que a los 10 minitos se habían formado 7 Kg de C. Determinar la cantidad limite de C que se formara y las cantidades de A y de B que quedaran sin reaccionar.

29. Un objeto con masa de 5 kg se suelta a partir del reposo a 1000 m del suelo. Suponiendo que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto con constante de proporcionalidad k=50 kg/seg., determinar la ecuación del movimiento del objeto. ¿En qué momento se producirá el impacto contra el suelo?

30. A un objeto con masa de 5 kg se le aplica una velocidad inicial hacia abajo de 50 m/seg, después se le deja caer bajo la influencia de la gravedad. La fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-10v$ donde $v$ es la velocidad del objeto. Determinar la ecuación del movimiento del objeto si se encuentra inicialmente a 500 m del suelo. Calcular el instante de llegada al suelo.

31. A un objeto de 8 kg de masa se le aplica una velocidad inicial hacia arriba de 20 m/seg. a 100 m del suelo. Si la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-16v$ con $v$ la velocidad del objeto, hallar la ecuación del movimiento. ¿Qué altura cogerá el objeto? ¿Qué tiempo transcurre desde que se empuja hacia arriba hasta que llega al suelo?

32. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden.

| | |
|---|---|
| $a)\ (2x+3y)dx+(y-x)dy=0$ | $b)\ (1+2e^{\frac{x}{y}})dx+2e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$ |
| $c)\ (y^2-x^2)dx+xydy=0$ | $d)\ (x-y-1)dx+(4y+x-1)dy=0$ |
| $e)\ (3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$ | $f)\ (x^2-y)dx-xdy=0$ |
| $g)\ (x+ycosx)dx+senxdy=0$ | $h)\ (x\sqrt{x^2+y^2}-y)dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-x)dy=0$ |
| $i)\ xdy-ydx=x^2e^xdx$ | $j) y'+2xy=4x$ |
| $k)\ x\frac{dy}{dx}=y+x^3+3x^2-2x$ | $l)\ \frac{dy}{dx}+ycotgx=5e^{cosx}$ |
| $m)\ yLnydx+(x-Lny)dy=0$ | $n)\ x^3y'+(2-3x^2)y=x^3$ |

33. Comprobar que la ecuación diferencial de la forma

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \text{ o bien } y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

se reduce a una ecuación lineal haciendo el cambio $y^{1-n} = v$. A este tipo de ecuaciones se le llama ecuación de Bernouilli. Como aplicación resolver las siguientes ecuaciones.

*a)* $y' - y = xy^5$ *b)* $y' + 2xy + xy^4 = 0$ *c)* $y^{-4}y' + \frac{1}{3}y^{-3} = \frac{1}{3}(1 - 2x)$

*d)* $y' + y = y^2(cosx - senx)$ *e)* $xdy - [y + xy^3(1 + Lnx)]dx = 0$

34. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, para las que es necesario el uso de factores integrantes.

*a)* $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ *b)* $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

*c)* $(x^4Lnx - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$ *d)* $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

*e)* $(x + senx + seny)dx + (cosy)dy = 0$ *f)* $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

*g)* $(2xy^2 + y)dx + (x + 2x^2y - x^4y^3)dy = 0$ *h)* $ydx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$

*i)* $\frac{dy}{dx} = \frac{y - xy^2 - x^3}{x + x^2y + y^3}$