TEMA I: ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR Y COEFICIENTES CONSTANTES

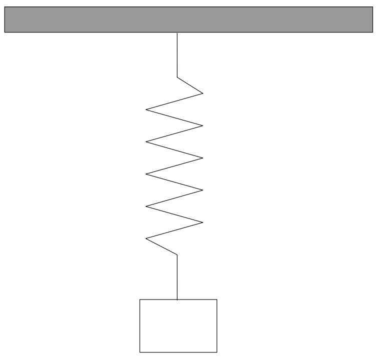
1. Introducción

Comenzaremos introduciendo algunos ejemplos en los que comparecen ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y coeficientes constantes, para luego pasar a estudiar su resolución.

1..1 Vibraciones Mecánicas

En la vida cotidiana aparacen diversos ejemplos de vibraciones mecánicas: automóviles al circular por suelo irregular, obras arquitectónicas sometidas a fuerzas exteriores, problemas de aeronáutica. etc.

Para llegar a entender este tipo de movimientos se suele empezar estudiando un sistema muy sencillo, consistente en un resorte en espiral uno de cuyos extremos está fijo en un punto y en el otro está suspendido un cuerpo con una determinada masa.



Para el estudio de este sistema recordemos dos leyes físicas fundamentales.

- **Ley de Hooke:** en un sistema resorte-masa la fuerza de restitución, opuesta a la dirección del alargamiento del resorte, es de magnitud proporcional al valor del alargamiento.

  Ejemplo: si un cuerpo de 2 Kg de masa estira el resorte 6 cm entonces el resorte ejerce una fuerza $6k$ con $k > 0$. Además se puede calcular k teniendo en cuenta que en la posición de equilibrio el peso y la fuerza de restitución son iguales en módulo y de sentidos opuestos, por lo que $2 \times 9.81 = 6k$, por tanto $k = \dfrac{9.81}{3}$.

- **Segunda Ley de Newton:** si la masa de un cuerpo es constante, $F = m \times a$.

Consideramos $x(t)$ la posición en el instante t de la masa, partiendo de que $x(0) = 0$ es el punto de equilibrio, es decir, entendemos $x > 0$ cuando la posición del objeto está por debajo de la de equilibrio y $x < 0$ cuando está por encima.

Analicemos ahora las distintas fuerzas que actúan sobre la masa m.

- <u>Gravedad:</u> fuerza dirigida hacia abajo de magnitud $F_1 = m \times g$.
- <u>Fuerza de restitución:</u> fuerza hacia arriba ejercida por el resorte y que es proporcional al alargamiento. Si tomamos l como el alargamiento inicial, es decir, en la posición de equilibrio, en cada instante t el alargamiento será $(l + x)$, luego $F_2 = -k(l + x) = -kl - kx$. Pero en la posición de equilibrio esta fuerza es igual, en magnitud, al peso $kl = mg$. Por lo tanto $F_2 = -kx - mg$.
- <u>Fuerza de amortiguación:</u> fuerza de resistencia del medio. Supondremos que es proporcional a la velocidad de la masa, pero en dirección opuesta a ésta $F_3 = -b\dfrac{dx}{dt}$, $\quad b > 0$; $\quad$ ($b \equiv$ cte de amortiguación).
- <u>Fuerzas externas:</u> todas las fuerzas externas que actúan sobre la masa (magnéticas y de otros tipos) $F_4 = f(t)$. Para simplificar supondremos que sólo dependen del tiempo y no de la posición.

La trayectoria de la masa verifica entonces:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t),$$

de donde se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Según los valores de b y $f(t)$ se distinguen los siguientes casos:

1. $b = 0$, $f(t) = 0$. Sistema libre no amortiguado. Produce el movimiento armónico simple. El objeto no se para.

2. $b > 0$, $f(t) = 0$. Sistema libre amortiguado

(a) Si $b^2 < 4mk$, movimiento oscilatorio o subamortiguado. El objeto oscila cada vez menos.

(b) Si $b^2 = 4mk$, movimiento críticamente amortiguado. El objeto no oscila.

(c) Si $b^2 > 4mk$, movimiento sobre amortiguado. El objeto no oscila.

En cualquiera de los casos anteriores $f(t) \equiv 0$ con lo que la ecuación diferencial se reduce a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Si nos planteamos cómo deben ser las funciones solución de esta última ecuación, no sería muy descabellado pensar que han de ser exponenciales o trigonométricas, pues la ecuación nos dice que no debe haber mucha diferencia entre la función $x(t)$ y sus derivadas.

Ejemplos:

- $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 25x = 0; \quad x_1(t) = e^{-4t}cos(3t)\ ,\ x_2(t) = e^{-4t}sen(3t).$
- $\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 25x = 0; \quad x_1(t) = e^{-5t}\ ,\ x_2(t) = te^{-5t}.$

2. Teoría general

2..1 La ecuación homogénea

Pasemos a continuación a demostrar una serie de propiedades de las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, que nos ayudarán a entender el método de resolución de éstas.

Sea la ecuación diferencial

$$a_0y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_ny(x) = f(x) \tag{2.1}$$

donde $a_0,\ a_1,\ ...\ , a_n$ son constantes reales, $y(x) \in C^n$, $f(x) \in C$ $(a \leq x \leq b)$.

En caso de que $f \equiv 0$ (función nula) la ecuación (2.1) se dice homogénea

$$a_0y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_ny(x) = 0. \tag{2.2}$$

Proposición 1. *Si $y_1(x)$ es solución de la ecuación lineal homogénea (2.2), entonces $Cy_1(x)$ es también solución de la ecuación (2.2) para toda constante C.*

Demostración:

Dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\dfrac{d^k}{dx^k}[Cy_1(x)] = Cy_1^{(k)}(x)$, el lado derecho de la igualdad (2.2) aplicado a $Cy_1(x)$ quedaría

$$a_0Cy_1^{(n)}(x) + a_1Cy_1^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_nCy_1(x)$$

o lo que es lo mismo

$$C[a_0y_1^{(n)}(x) + a_1y_1^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_ny_1(x)] = 0.$$

Nótese que la suma expresada entre corchetes es cero, ya que $y_1(x)$ es solución de (2.2).

Proposición 2. *Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación homogénea (2.2), entonces $y_1(x) + y_2(x)$ también es solución de dicha ecuación.*

Demostración:

Dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\dfrac{d^k}{dx^k}[y_1(x) + y_2(x)] = y_1^{(k)}(x) + y_2^{(k)}(x)$, el lado derecho de la igualdad (2.2) aplicado a $y_1(x) + y_2(x)$ quedaría

$$a_0[y_1^{(n)}(x) + y_2^{(n)}(x)] + a_1[y_1^{(n-1)}(x) + y_2^{(n-1)}(x)] + \ ..... \ + a_n[y_1(x) + y_2(x)]$$

o lo que es lo mismo

$$[a_0y_1^{(n)}(x) + a_1y_1^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_ny_1(x)] + [a_0y_2^{(n)}(x) + a_1y_2^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_ny_2(x)] = 0$$

nótese que las sumas expresadas entre corchetes son cero, ya que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (2.2).

Corolario 2..1 *Si $y_1(x),\ y_2(x),\ ....\ ,\ y_p(x)$ son soluciones de (2.2), entonces $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i(x)$ es también solución de (2.2), siendo $C_1,\ C_2,\ ...,\ C_p$ constantes arbitrarias.*

Proposición 3. *Si la ecuación (2.2) admite una solución compleja $y(x) = u(x) + iv(x)$, $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$, entonces las funciones reales $Re(x) = u(x)$, $Im(x) = v(x)$ son también soluciones de (2.2).*

Demostración:

Dado que para todo $k \in \mathbb{N}$ se verifica que $\dfrac{d^k}{dx^k}[u(x) + iv(x)] = u^{(k)}(x) + iv^{(k)}(x)$, la igualdad (2.2) aplicada a $u(x) + iv(x)$ quedaría

$$0 = 0 + i0 = a_0[u^{(n)}(x) + iv^{(n)}(x)] + a_1[u^{(n-1)}(x) + iv^{(n-1)}(x)] + \ ..... \ + a_n[u(x) + iv(x)]$$

o lo que es lo mismo

$$0 = 0 + i0 = [a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n u(x)] + i[a_0 v^{(n)}(x) + a_1 v^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n v(x)]$$

aplicando la igualdad de números complejos, se deduce que $a_0 u^{(n)}(x) + a_1 u^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n u(x) = 0$ y $a_0 v^{(n)}(x) + a_1 v^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n v(x) = 0$.

Definición 2..1 *Decimos que las funciones $y_1(x),\ y_2(x),\ ...,\ y_m(x)$ son linealmente dependientes en cierto segmento de variación de x, $a \le x \le b$, si existen constantes no todas nulas $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$, tales que*

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \; ... \; + \alpha_m y_m(x) = 0 \qquad (a \le x \le b)$$

En caso de que esta última identidad sólo se verifique para $\alpha_1 = \alpha_2 = \; ... \; = \alpha_m = 0$, diremos que las funciones son linealmente independientes en $a \le x \le b$.

Ejemplos:

Las siguientes funciones son linealmente independientes en cualquier segmento $a \le x \le b$.

1. $1,\ x,\ x^2,\ ...\ ,x^n$
2. $e^{k_1 x},\ e^{k_2 x},\ ...\ ,e^{k_m x} \qquad (k_i \neq k_j$ si $i \neq j)$.
3. $e^{k_1 x}, x\ e^{k_1 x},\ ...\ ,x^{n_1} e^{k_1 x},\ ...\ ,e^{k_p x}, x\ e^{k_p x},\ ...\ ,x^{n_p} e^{k_p x} \qquad (k_i \neq k_j$ si $i \neq j)$.

Proposición 4. *Si las funciones $y_1,\ y_2,\ ...\ ,\ y_n$ son linealmente dependientes en el segmento $a \le x \le b$, entonces en dicho segmento el determinante*

$$W(x) = W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

llamado wroskiano, es idénticamente nulo.

Demostración:

Como $y_1,\ y_2,\ ...\ ,\ y_n$ son linealmente dependientes, deben existir $\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...,\ \alpha_m$ constantes, no todas nulas, tales que

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ ...\ + \alpha_m y_m(x) = 0. \qquad (a \leq x \leq b)$$

Derivando esta igualdad $n-1$ veces obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ ...\ + \alpha_m y_m(x) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \alpha_2 y_2'(x) + \ ...\ + \alpha_m y_m'(x) = 0 \\ .... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ ...\ + \alpha_m y_m^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Para cada $x_0 \in [a,b]$, este sistema representa un sistema lineal homogéneo con incógnitas α_i, $i = 1, 2, ...n$. Como existe solución distinta de la trivial, el determinante de la matriz del sistema es cero, es decir, $W(x_0) = 0$, y dado que esto se verifica para todo $x_0 \in [a,b]$, concluimos que $W(x) = 0$ en dicho segmento.

Proposición 5. *Si las funciones linealmente independientes* $y_1,\ y_2,\ ...\ ,\ y_n$ *son soluciones de la ecuación lineal homogénea (2.2), en el segmento* $a \leq x \leq b$*, entonces* $W(x) \neq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$*.*

Antes de abordar la demostración de esta proposición, enunciemos el teorema de existencia y unicidad de soluciones para la ecuación diferencial lineal de orden superior.

Teorema 2..1 *Dada la ecuación diferencial*

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ ...\ + p_n(x)y(x) = q(x)$$

si $p_i(x),\ i = 0, 1, ..., n$ *y* $q(x)$ *son funciones continuas en un intervalo* (a,b) *que contiene al punto* x_0*, entonces el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \ ...\ + p_n(x)y(x) = q(x) \\ \quad y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,\ ....\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admite una solución única en el intervalo (a,b)*.*

Nota: En nuestro caso $p_i(x) = a_i \equiv\ cte$ para todo $i = 0, 1, ..., n$ y $q(x) = 0$, por tanto son funciones continuas en cualquier intervalo (todo $\mathbb{R}$). Por lo que tenemos garantizada la aplicación del teorema.

Demostración de la Proposición 5:

Usemos el método de reducción al absurdo. Supongamos que existe $x_0 \in [a,b]$ para el que $W(x_0) = 0$. Elegimos constantes α_i $(i = 1, 2, ..., n)$ tales que se verifica el sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \ ... \ + \alpha_n y_n(x_0) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \ ... \ + \alpha_n y_n'(x_0) = 0 \\ .... \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ ... \ + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases}$$

Debido a que $W(x_0) = 0$, tenemos garantizada la existencia de soluciones distintas de la trivial (algún $\alpha_i \neq 0$).

La función $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ ... \ + \alpha_n y_n(x)$ es solución de la ecuación homogénea (Corolario 2.1), verificando $y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0,\ ....\ , y^{(n-1)}(x_0) = 0$, pero estas mismas condiciones iniciales las verifica la función $y \equiv 0$. Por el teorema de existencia y unicidad, deducimos que $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ ... \ + \alpha_n y_n(x) = 0$ con algún $\alpha_i \neq 0$, lo que contradice la hipótesis. Por tanto, para todo $x \in [a,b]$, $W(x) \neq 0$.

Proposición 6. *La combinación lineal* $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$*, con coeficientes constantes arbitrarios, de n soluciones particulares linealmente independientes en el segmento* $a \leq x \leq b$*, de la ecuación (2.2), constituye la solución general de esta ecuación en dicho intervalo.*

Demostración:

La ecuación (2.2), para $a \leq x \leq b$, verifica las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Por ello la solución $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ será general, es decir, contendrá a todas las soluciones particulares sin excepción, si es posible escoger las constantes arbitrarias C_i de manera que se satisfagan las condiciones iniciales dadas arbitrariamente $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ....\ , y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$ donde x_0 es un punto cualquiera del segmento $a \leq x \leq b$.

Al exigir que $y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)$ satisfaga las condiciones iniciales impuestas, obtenemos un sistema de n ecuaciones lineales con respecto a C_i $(i = 1, 2, ..., n)$

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ ... \ + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ ... \ + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ .... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ ... \ + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1} \end{cases}$$

cuyo determinante es diferente de cero, puesto que dicho determinante es el wroskiano, $W(x_0)$ de n soluciones linealmente independientes de la ecuación (2.2). Por tanto, este sistema es resoluble con respecto a C_i para cualquier $x_0 \in [a, b]$ y para cualesquiera segundos miembros.

Corolario 2..2 *Esta última proposisción nos asegura que el número máximo de soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea es igual a su orden.*

Definición 2..2 *Se llama sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea, de orden n, al conjunto de cualesquiera n soluciones particulares linealmente independientes.*

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos hasta el momento

Teorema 2..2 *Supongamos que $p_i(x)$, $(i = 0, 1, 2, ..., n)$ son funciones continuas sobre el intervalo I, e $y_i(x)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea*

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + p_n(x)y(x) = 0.$$

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. *$\{y_1,\ y_2,\ ...\ , y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.*
2. *$W[y_1,\ y_2,\ ...\ , y_n] \neq 0$ en todo I.*
3. *$\{y_1,\ y_2,\ ...\ , y_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones.*
4. *La solución general de la ecuación viene dada por*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)) C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \; ... \; + C_n y_n(x).$$

Ya estamos en condiciones de intentar resolver las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y coeficientes constantes.

Dada la ecuación

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n y(x) = 0,$$

hemos de encontrar n soluciones linealmente independientes para construir la solución general. Tal y como habíamos apuntado parece lógico empezar por buscar soluciones del tipo $y(x) = e^{rx}$. Teniendo en cuenta que $y^{(k)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} y(x) = r^k e^{rx}$, llevado a la ecuación obtenemos:

$$a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \; ... \; + a_n e^{rx} = 0,$$

$$(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ \dots \ + a_n)e^{rx} = 0,$$

y como $e^{rx} \neq 0$ debe ser $a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ \dots \ + a_n = 0$. Ésta es la llamada **ecuación característica**.

Las raíces de la ecuación característica determinan los valores de r para los que e^{rx} es solución de la ecuación diferencial. Estudiemos las distintas posibilidades para dichas raíces.

1. La ecuación característica posee n raíces reales y distintas, $r_1, r_2, ..., r_n$. En este caso, las funciones $y_1(x) = e^{r_1x}$, $y_2(x) = e^{r_2x}$, ..., $y_n(x) = e^{r_nx}$, forman un sistema fundamental de soluciones. Por tanto la solución general será

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ \dots \ + C_ne^{r_nx}.$$

   Ejemplos:

   (a) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

   (b) $y''' - y' = 0$.

2. La ecuación característica posee raíces complejas simples (éstas aparecen por pares, una y su conjugada): $r_1 = a + ib \quad r_2 = a - ib$. Puesto que

$$e^{r_1x} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}[cos(bx) + isen(bx)],$$

$$e^{r_2x} = e^{(a-ib)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}[cos(bx) - isen(bx)],$$

   haciendo uso de la Proposición 3, deducimos que $e^{ax}cos(bx)$ y $e^{ax}sen(bx)$ (parte real e imaginaria, respectivamente) son soluciones de la ecuación diferencial homogénea. Así, cada par de raíces complejas $a \pm bi$ aportan las soluciones

$$e^{ax}cos(bx), \quad e^{ax}sen(bx)$$

   al sistema fundamental de soluciones.

   Ejemplos:

   (a) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

   (b) $y'' + a^2y = 0$.

   (c) $y''' + 4y'' + 5y' = 0$.

3. La ecuación característica posee raíces múltiples

   - r_i raíz real con orden de multiplicidad k

     $$e^{r_i x},\ xe^{r_i x},\ x^2 e^{r_i x},\ \dots,\ x^{k-1} e^{r_i x}$$

     son las soluciones aportadas por la raíz r_i al sistema fundamental de soluciones.

   - $a \pm ib$ raíces con orden de multiplicidad p.

     $$e^{ax} cos(bx),\ e^{ax} sen(bx),\ xe^{ax} cos(bx),\ xe^{ax} sen(bx),\ \dots,\ x^{p-1} e^{ax} cos(bx),\ x^{p-1} e^{ax} sen(bx)$$

     son las soluciones aportadas por $a \pm ib$.

   Ejemplos:

   (a) $y''' - 3y' + 2y = 0$.

   (b) $y^{(iv)} + 8y''' + 10y'' + 56y' + 25y = 0$.

   (c) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$.

Retomemos ahora nuestro ejemplo del muelle

$$m\frac{d^2x}{dx^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t),$$

$$mx'' + bx' + kx = f(t).$$

Analizaremos cómo son las soluciones de esta ecuación en diferentes casos.

1. Sistema libre no amortiguado. En este caso no hay rozamiento, ni fuerzas externas. Es decir, $b = 0$, $f(t) \equiv 0$. La ecuación se reduce a $mx'' + kx = 0$.

   $$mr^2 + k = 0 \implies r^2 = -w^2 \left(\text{haciendo } w = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \implies r = \pm iw.$$

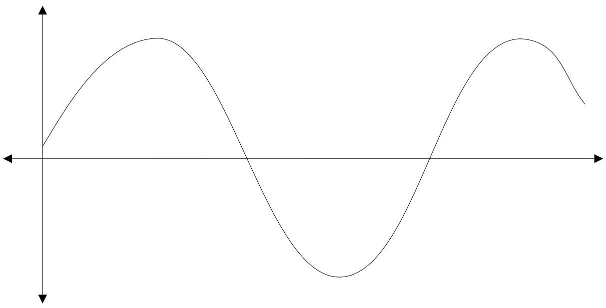
   La solución es de la forma

   $$x(t) = C_1\, cos(wt) + C_2\, sen(wt).$$

   Si hacemos $C_1 = A\ sen\ \phi$, $\quad C_2 = A\ cos\ \phi$ o lo que es lo mismo $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, $\quad tag\ \phi = \dfrac{C_1}{C_2}$, podemos escribir

   $$x(t) = A\ sen(wt + \phi)$$

   El movimiento resultante se conoce como **movimiento armónico simple**. $A \equiv$ amplitud del movimiento, $\phi \equiv$ ángulo de fase y $\dfrac{2\pi}{w} \equiv$ periodo.



2. Sistema libre amortiguado. Ahora no hay fuerzas externas, pero sí rozamiento. Es decir, $b > 0$, $f(t) \equiv 0$. La ecuación es $mx'' + bx' + kx = 0$.

$$mr^2 + bm + k = 0 \implies r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

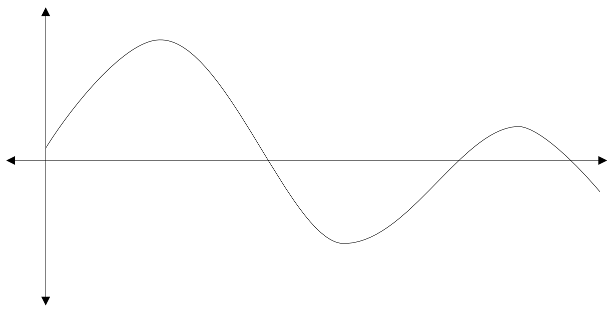
   (a) $b^2 < 4mk$, $r = -\frac{b}{2m} \pm i\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$

$$x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}[C_1 cos(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t) + C_2 sen(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t)].$$

   Haciendo otra vez $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad tag\ \phi = \frac{C_1}{C_2}$

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} sen[(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m})t + \phi].$$

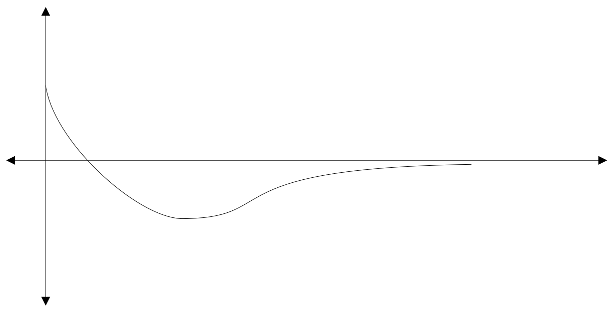
   Éste es el **movimiento oscilatorio o subamortiguado**. La cantidad $\frac{2\pi}{\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}} = \frac{4\pi m}{\sqrt{4mk-b^2}}$ se llama cuasiperiodo.



(b) $b^2 = 4mk$, $r = -\dfrac{b}{2m}$ raíz doble:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{b}{2m}t} + C_2 t\, e^{-\frac{b}{2m}t} = e^{-\frac{b}{2m}t}[C_1 + C_2 t].$$

La solución tiene un único punto crítico (máximo o mínimo) cuando $C_2 - \frac{b}{2m}C_1 - \frac{b}{2m}C_2 t = 0$ (por tanto no oscila). Éste se llama **movimiento críticamente amortiguado**.



(c) $b^2 > 4mk$, $r_1 = -\dfrac{b}{2m} + \dfrac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$ y $r_2 = -\dfrac{b}{2m} - \dfrac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$. Ocurre que $r_2 < r_1 < 0$. La solución es

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},$$

y el comportamiento es esencialmente como en el caso anterior. Éste es el **movimiento sobreamortiguado**.

2..2 La ecuación no homogénea o completa

Pasemos a continuación a estudiar la ecuación completa

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ \ldots.. \ + a_n y(x) = f(x).$$

Proposición 7. *Si $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación completa e $y_1(x)$ es solución de la correspondiente ecuación homogénea, entonces $y(x) = y_1(x) + y_p(x)$ es también solución de la ecuación completa.*

<u>Demostración</u>:
Si denotamos por L al operador $a_0 \dfrac{d^n}{dx^n} + a_1 \dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ \ldots \ + a_n$, es obvio que $Ly_1(x) = 0$ y que $Ly_p(x) = f(x)$, por tanto $Ly(x) = L[y_1(x) + y_p(x)] = Ly_1(x) + Ly_p(x) = 0 + f(x) = f(x)$.

Teorema 2..3 *La solución general de la ecuación no homogénea viene dada por*

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

donde $y_h(x)$ *es la solución general de la correspondiente ecuación homogénea e* $y_p(x)$ *cualquier solución particular de la ecuación completa.*

Demostración:
Análoga a la del teorema que daba la expresión de la solución general de la ecuación homogénea.

Nuestro problema consiste ahora en cómo buscar una solución particular de la ecuación completa. Introduciremos, a través de ejemplos, dos métodos. El primero, denominado de los **coeficientes indeterminados**, consiste en imitar el término no homogéneo de la ecuación, y sólo se puede aplicar cuando dicho término tenga una expresión adecuada. El segundo, llamado de **variación de las constantes**, es más general que el primero y puede aplicarse en cualquier caso.

Coeficientes indeterminados

1. $y'' + 3y' + 2y = 3x + 1$, probar a determinar a y b para que $y_p(x) = ax + b$ sea solución.

2. $y'' + y = e^{2x}$, probar a determinar A para que $y_p(x) = Ae^{2x}$ sea solución.

3. $y'' + 2y' + y = cos(2x)$, probar a determinar A y B para que $y_p(x) = A\ cos(2x) + B\ sen(2x)$ sea solución.

4. $y'' + 2y' + y = (2x - 1)cos(2x)$, probar a determinar A, B, C y D para que $y_p(x) = (Ax + B)cos(2x) + (Cx + D)sen(2x)$ sea solución.

   En los siguientes ejemplos hemos de modificar algo este método debido a que el término no homogéneo de la ecuación está parcial o totalmente recogido en la solución general de la ecuación homogénea. Este hecho se debe a la naturaleza de las raíces de la ecuación característica. En todos ellos resuélvase primero la ecuación homogénea.

5. $y^{(iv)} + y'' = 5x^2 - 2x + 1$. Pruébese primero con $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$, y luego con $y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C)$.

6. $y'' + y = cos\ x$. Pruébese primero con $y_p(x) = A\ cos\ x + B\ sen\ x$, y después con $y_p(x) = x(A\ cos\ x + B\ sen\ x)$.

7. $y'' + y = x\ cos\ x$. Pruébese primero con $y_p(x) = (Ax + B)cos\ x + (Cx + D)sen\ x$, y luego con $y_p(x) = x[(Ax + B)cos\ x + (Cx + D)sen\ x]$.

8. $y^{(iv)} - 4y''' + 14y'' - 20y' + 25 = (3x + 1)e^x cos(2x)$. Pruébese primero con $y_p(x) = (Ax + B)e^x cos(2x) + (Cx + D)e^x sen(2x)$, y luego con $y_p(x) = x^2[(Ax+B)e^x cos(2x)+(Cx+D)e^x sen(2x)]$.

Dada la ecuación

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ ..... \ + a_n y(x) = f(x),$$

el siguiente resumen es útil para la búsqueda de soluciones particulares por el método de los coeficientes indeterminados.

1. Si $f(x) = b_s x^s + b_{s-1} x^{s-1} + \ ... \ + b_1 x + b_0$:

   (a) $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica:

   $$y_p(x) = A_s x^s + \ ... \ + A_1 x + A_0.$$

   (b) $r = 0$ es raíz de orden k de la ecuación característica:

   $$y_p(x) = x^k(A_s x^s + \ ... \ + A_1 x + A_0).$$

2. Si $f(x) = p(x)cos(bx) + q(x)sen(bx)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios no necesariamente de igual grado:

   (a) $r = \pm ib$ no son raíces de la ecuación característica:

   $$y_p(x) = P(x)cos(bx) + Q(x)sen(bx)$$

   siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, a determinar, de grado $l = max[grado\, p(x), grado\, q(x)]$.

   (b) $r = \pm ib$ son raíces de orden k de la ecuación característica:

   $$y_p(x) = x^k[P(x)cos(bx) + Q(x)sen(bx)]$$

   siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, a determinar, de grado $l = max[grado\, p(x), grado\, q(x)]$.

3. Si $f(x) = p(x)e^{ax}$, donde $p(x)$ es un polinomio:

(a) $r = a$ no es raíz de la ecuación característica:

$$y_p(x) = P(x)e^{ax}$$

siendo $P(x)$ un polinomio, a determinar, de igual grado que $p(x)$.

(b) $r = a$ es raíz de orden k de la ecuación característica:

$$y_p(x) = x^k P(x)e^{ax}$$

siendo $P(x)$ un polinomio, a determinar, de igual grado que $p(x)$.

4. Si $f(x) = e^{ax}[p(x)cos(bx) + q(x)sen(bx)]$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios no necesariamente de igual grado:

(a) $r = a \pm ib$ no son raíces de la ecuación característica:

$$y_p(x) = e^{ax}[P(x)cos(bx) + Q(x)sen(bx)]$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, a determinar, de grado $l = max[grado\, p(x), grado\, q(x)]$.

(b) $r = a \pm ib$ son raíces de orden k de la ecuación característica:

$$y_p(x) = x^k e^{ax}[P(x)cos(bx) + Q(x)sen(bx)]$$

siendo $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, a determinar, de grado $l = max[grado\, p(x), grado\, q(x)]$.

Variación de las constantes

Este método es más general que el anterior y puede aplicarse en cualquier caso. Dada la ecuación

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \; ..... \; + a_n y(x) = f(x),$$

hallaremos la solución general de la correspondiente ecuación homogénea

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \; ... \; + C_n y_n(x),$$

y supondremos que existe una solución particular de la ecuación completa de la forma

$$y_h(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \; ... \; + C_n(x) y_n(x),$$

donde las funciones incognitas $C_i(x)$, $i = 1, 2, ..., n$ las calcularemos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ \dots \ + C_n'(x)y_n(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ \dots \ + C_n'(x)y_n'(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2''(x) + \ \dots \ + C_n'(x)y_n''(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ \dots \ + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x). \end{cases}$$

Ejemplos:

1. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$
2. $y''' + y' = \dfrac{1}{sen\ x}$