

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA

Práctica nº 4: Cálculo diferencial de funciones de una variable

Ejercicio 1

Dibuja las gráficas de las curvas de ecuación

- $y^2 (y^2 - b^2) - x^2 (x^2 - a^2) = 0$, llamada **curva del diablo**, para $a = 1$, $b = 0.85$.
- $r = \cos(t)^n + 1$, curva llamada **pacman**, $n = 999$.
- $\left[\frac{a(t^2 - 1)}{t^2 + 1}, \frac{a t(t^2 - 1)}{t^2 + 1} \right]$, curva llamada **estrofoide**, para $a = 1$.
- $r = \left(\frac{a \sin(t)}{t} \right)^n$, curva llamada **cocleoide**, para $a = n = 1$.
- $x^4 y^2 - c^2 x^2 + c^2 a^2 = 0$, llamada **curva cuártica**, para $a = 0.1$, $c = 0.2$.
- $[t \cos(t^2), t \sin(t^2)]$, curva llamada **espiral de Fermat**.
- $[a \sin(n t + d), b \sin(t)]$, curva llamada **lissanjous**, para $A = b = 1$, $d = 4$, $n = 3/4$.
- $x^2 - 3 x y + x + 2 y - 3 = 0$
- $[(a \cos(2 t) - b \cos(t)) \cos(t), (a \cos(2 t) - b \cos(t)) \sin(t)]$, curva llamada **escarabajo**, para $a = 1$, $b = 1/2$.

+ Solución

Ejercicio 2

Hallar los siguientes límites y especificar el tipo de indeterminación.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \left(\frac{1}{\sin(x)} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\log\left(1 + \frac{x+3}{x^2+7}\right)}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x)^x$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arctan\left(e^x - \frac{\pi}{2}\right)$

+ Solución

Ejercicio 3

La función $f(x)$ admite como derivada la función

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^3}{x^2 + 1} + 3 \cos(x^3) x^2}{x^2 + 1} - \frac{2(x^2 \ln(x^2 + 1) + \sin(x^3)) x}{(x^2 + 1)^2}$$

Justificando todos los razonamientos, dar una estimación de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$. Se entiende que darás una representación de la misma dibujada a mano.

+ Respuesta

- Ejercicio 4

La ecuación de Van der Waals relaciona la presión P con el volumen V de un gas encerrado por la fórmula

$$(Pv^2 + a)(V - b) = kV^2$$

donde v , k , a y b son parámetros fijos. Haciendo uso de la derivación implícita, deducir la expresión general de la variación del volumen V por unidad de presión P .

Hallar su valor para una presión $P=1$ at. con los valores de los parámetros $a=3$, $b=5$, $v=10$ y $k=\pi$.

+ Solución

- Ejercicio 5

Un fabricante de circuitos tiene unos costes de producción diarios de

$$C = 800 - 10x + \frac{x^2}{4}$$

donde x es el número de circuitos que puede construir diariamente. ¿Cuántos circuitos deberá fabricar cada día para minimizar los costes?

+ Solución

- Ejercicio 6

Aproximar la función $f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}$ en $x = 1$, mediante un polinomio de grado 6.

Representar gráficamente la función y su aproximante.

+ Solución

- Ejercicio 7

Consideremos la ecuación diferencial siguiente que rige un circuito

$$3q''(x) + 2q'(x) - q(x) = (1 - x^2) \sin(x)$$

con condiciones iniciales $q(0) = 0$ y $q'(0) = \pi$.

a) Deducir, al igual a como hicimos en clase, los polinomios de Taylor de grado 5, 10 y 15.

b) Representar gráficamente estos polinomios y compararlas con la solución del problema $q(x)$ en el intervalo $[0, 7]$.

$$q(x) = \frac{\cos(x) x^2}{10} + \frac{13 \cos(x) x}{25} + \frac{\sin(x) x^2}{5} - \frac{169 \sin(x)}{250} - \frac{117 \cos(x)}{250} - \frac{9 \sin(x) x}{25} - \frac{3 \pi e^{(-x)}}{4} + \left(\frac{117}{250} + \frac{3 \pi}{4} \right) e^{\left(\frac{x}{3} \right)}$$

+ Solución

- Ejercicio 8

Para cada una de las raíces reales de cada polinomio del ejercicio anterior, determinar n tal que la aproximación x_n , dada por el Método de Newton, de dicha raíz tenga un error inferior a $10^{(-30)}$. No se pide calcular la aproximación x_n sino estudiar únicamente hasta el Paso 4 del Método de Newton para estas funciones.

+ Solución

- Ejercicio 9

Determinar por métodos directos de MAPLE, si es posible, y por el método de Newton, la raíz positiva no nula más pequeña de la ecuación $\tan(x^2) = \sin(x)$ con error inferior a 0.00002. Estudiar el Paso 5 con diferentes elecciones del punto inicial, por ejemplo, $x_0 = a$, $x_0 = b$, $x_0 = 2a/5 + 3b/5$.

+ Solución

- Ejercicio 10

Determinar por el método de Newton, una raíz de las siguientes ecuaciones con el error ε que se indican

- a) $2x^2 \sin(x) e^x = 1$, $\varepsilon = 0.000005$. b) $e^{(1-x)} = \tan(x)^2 + 7$, $\varepsilon = 0.00007$. c) $\cos(x)^2 + 4 \sin(x) = 0$, $\varepsilon = 0.0000008$.

+ Solución